



Anisotropies et polarisation du rayonnement fossile: méthode de détection et traitement de données

Benoît Revenu

► To cite this version:

Benoît Revenu. Anisotropies et polarisation du rayonnement fossile: méthode de détection et traitement de données. Physique des Hautes Energies - Expérience [hep-ex]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2000. Français. NNT: . tel-00001686

HAL Id: tel-00001686

<https://theses.hal.science/tel-00001686>

Submitted on 12 Sep 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE de DOCTORAT de l'Université Paris 7

présentée par

Benoît Revenu

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paris 7
Spécialité : Champs, Particules, Matières

**Anisotropies et polarisation du
rayonnement fossile :
méthodes de détection
et traitement de données.**

Soutenue le 15 mai 2000, devant le jury composé de :

Jean-Loup	Puget	président du jury
Pierre	Aguer	examineur
James	Bartlett	rapporteur
Jean	Kaplan	directeur de thèse
Lloyd	Knox	rapporteur
Luc	Valentin	examineur

Remerciements¹

En premier lieu, je tiens à remercier très chaleureusement mon directeur de thèse Jean Kaplan dont la grande expérience et la spontanéité m'ont été extrêmement profitables pendant ces années de thèse. J'espère avoir dans l'avenir de nombreuses occasions de poursuivre nos échanges.

Je remercie également Jacques Delabrouille de sa disponibilité ; il m'a appris, entre autres, à me diriger dans l'espace de Fourier. J'ai eu la chance de rencontrer Alex Kim, qui a passé deux ans avec nous ; son humour et ses compétences m'ont été d'un grand secours et je l'en remercie vivement.

J'exprime toute ma reconnaissance à François Couchot et à Réza Ansari pour leur gentillesse, leur disponibilité et les remarques avisées qu'ils ont pu formuler au cours de notre collaboration.

Je remercie Lloyd Knox et Jim Bartlett d'avoir endossé le rôle de rapporteur de ma thèse. Merci également à Jean-Loup Puget, et Pierre Aguer d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Merci en particulier à Luc Valentin qui m'a beaucoup appris, de part son enseignement à l'université Paris 7 empreint de sa personnalité.

"The author would like to thank Jean-Christophe Hamilton for useful discussions" ; notre amitié m'a été précieuse. Je remercie Alain Bouquet et Yannick Giraud-Héraud pour leur disponibilité et leur bonne humeur permanente. Merci à Ken Ganga de m'avoir fait bénéficier de son immense expérience sur le rayonnement fossile. Je suis très reconnaissant à Marcel Froissart d'avoir répondu sans délai à mes questions allant du principe de Mach jusqu'au calcul intégral.

J'ai hâte de retrouver un peu de repos auprès de mon épouse Caroline et de mes enfants Clément et Alice dont l'absence m'a été particulièrement difficile à supporter.

Je remercie chaleureusement les bibliothécaires, Josette Come-Garry et Florence Bonamy pour leur efficacité et leur gentillesse. Merci également à Hélène LeBihan pour sa bonne humeur quotidienne.

Merci à tous les habitués du repas de midi, moment de véritable détente indispensable surtout en fin de thèse.

Je tiens à remercier tante Madeleine qui, en m'hébergeant ces dernières semaines à quelques minutes du laboratoire, m'a permis de gagner beaucoup de temps.

Enfin, merci à mes parents Marie et Daniel d'être là.

¹ Je ne remercie pas les plantages informatiques accidentels ainsi que les "hackers".

TABLE DES MATIÈRES

<i>Introduction</i>	1
 <i>partie I Le modèle cosmologique du Big-Bang</i>	5
 1. <i>L'univers homogène et isotrope</i>	7
1.1 Le principe cosmologique	7
1.2 La relativité	8
1.2.1 Vers la relativité générale	8
1.2.2 Relativité générale	9
1.3 L'univers de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	11
1.3.1 Métrique	11
1.3.2 Dynamique	12
1.3.3 Loi de Hubble et redshift	16
1.3.4 Paramètres cosmologiques	18
1.3.5 Distances et temps écoulé	21
1.3.6 Horizons et rayon de Hubble	25
1.4 Le modèle du <i>Big-Bang</i>	28
1.4.1 Propriétés et bref historique	28
1.4.2 Scénario	35
 2. <i>Fluctuations dans l'univers</i>	41
2.1 Observations	41
2.1.1 Élargissement du principe cosmologique	41
2.1.2 Méthode statistique	41
2.1.3 La matière noire	43
2.2 Le rayonnement de fond cosmologique	47

2.3	Inflation	52
2.3.1	Les problèmes de l’“ancien” modèle standard.	53
2.3.2	Le concept d’inflation ; solutions aux problèmes du modèle standard	57
2.3.3	Principe de la théorie de l’inflation	60
2.4	Perturbations cosmologiques	64
2.4.1	Approche newtonienne	65
2.4.2	Solutions uniformes	66
2.4.3	Perturbation du modèle	67
2.4.4	Solutions du modèle perturbé	68
2.4.5	Approche relativiste	72
2.5	Les anisotropies du CMB	77
2.5.1	Anisotropies et échelles angulaires	77
2.5.2	Anisotropies et paramètres cosmologiques	80
2.5.3	Expériences CMB et fonctions fenêtres	82
2.5.4	Variance cosmique	84
2.5.5	Principe du calcul complet	84
2.6	La polarisation du CMB	85
2.6.1	Les paramètres de Stokes	85
2.6.2	Polarisation du CMB et quadrupôles	88
2.6.3	Figures de polarisation — champs E et B	92
2.6.4	Aperçu de l’équation de transfert	96
	<i>Intermèdes</i>	100
A.	<i>Cartes et spectres de puissance</i>	103
A.1	Généralités	103
A.2	Cartes	105
A.2.1	Cas de la température	105
A.2.2	Cas de la polarisation	106
A.3	Conclusions	108
B.	<i>La mesure de la polarisation</i>	109

B.1	Paramètres de Stokes et polarimètres	109
B.2	Vers des configurations optimisées	110
B.2.1	Cas idéal	110
B.2.2	Cas plus réaliste	112
B.2.3	Superposition de mesures	113
B.2.4	Matrices de corrélation des $a_{\ell m}^E$ et $a_{\ell m}^B$	115
B.3	Conclusion	116
 <i>partie II Le traitement du bruit basse fréquence</i>		117
1.	<i>Détection et bruits</i>	121
1.1	Principes généraux	121
1.2	Bruits	122
1.3	Alternatives	124
2.	<i>Scans circulaires et modélisation du bruit</i>	127
2.1	Scans circulaires	127
2.2	Superposition de plusieurs scans en un même cercle	127
2.3	Modélisation du bruit résiduel sur les cercles	132
3.	<i>Destriage</i>	139
3.1	Principe du destriage	139
3.2	Géométrie et intersections	140
3.2.1	Conditions d'intersection	142
3.2.2	Calcul des angles ψ d'intersection	142
3.2.3	Stratégies de balayage et intersections	143
3.3	Destriage	144
3.3.1	Mesure des paramètres de Stokes	144
3.3.2	L'algorithme	147
3.3.3	Simulations et test du destriage avec constante	150

<i>partie III Analyse préliminaire des données de COSMOSOMAS</i>	169
1. <i>Présentation de l'expérience</i>	171
2. <i>Géométrie et couverture du ciel</i>	173
3. <i>Analyse préliminaire des données</i>	175
3.1 Allure des données	175
3.2 Destriage	176
3.3 Fabrication de la carte du ciel	179
3.3.1 Recalage de la phase	179
3.3.2 Carte du ciel	182
3.4 Étude du lobe de l'instrument	183
3.5 Calibration sur la source Cygnus A	184
3.5.1 Correction des variations du gain	185
3.5.2 Température d'antenne et émission de Cygnus A	186
3.6 Conclusions et perspectives	189
<i>Conclusion générale</i>	191
<i>Annexe</i>	193
A. <i>Polynômes de Legendre et harmoniques sphériques</i>	195
B. <i>Destriage de la température</i>	201
C. <i>Approximation de l'atmosphère plane</i>	203
D. <i>Position moyenne de la galaxie en coordonnées équatoriales</i>	205
<i>Bibliographie</i>	206
<i>Glossaire</i>	212
<i>Index</i>	215

TABLE DES FIGURES

0.1	Penzias et Wilson en 1964	3
1.1	Cartographie du ciel visible à grande échelle	7
1.2	Le rayonnement fossile	8
1.3	Loi de Hubble	18
1.4	Isocontours de probabilité dans le plan $[\Omega_m, \Omega_\Lambda]$	22
1.5	Diamètres angulaires en fonction du redshift	23
1.6	Calcul de la distance angulaire	23
1.7	Horizon des particules	27
1.8	Reshift cosmologique	30
1.9	Einstein et Lemaître vers les années 30	31
1.10	Histoire de l'univers	36
1.11	Spectre du CMB	37
1.12	Prédictions des abondances.	39
2.1	Spectre de puissance de la distribution des galaxies	43
2.2	Courbe de rotation des étoiles	44
2.3	Recombinaison	49
2.4	Redshift du découplage des photons	50
2.5	Instruments du satellite COBE	51
2.6	Ciel vu par l'instrument D.M.R. de COBE	52
2.7	Problème de la platitude	55
2.8	Problème de l'horizon	55
2.9	Problème de la formation des structures	57
2.10	Formation des structures avec inflation	58
2.11	Solution au problème de l'horizon	59

2.12	Autour du découplage	71
2.13	Le CMB vu aujourd'hui	78
2.14	Oscillations acoustiques et pics Doppler	80
2.15	Effet de la géométrie de l'univers sur les anisotropies	82
2.16	Spectres de puissance du CMB	83
2.17	Portrait de George Gabriel Stokes	86
2.18	Transformation des paramètres de Stokes lors d'une rotation	87
2.19	Direction de la polarisation en fonction du signe de Q et U	88
2.20	Quadrupôles et polarisation	89
2.21	Diffusion Thomson et CMB	90
2.22	Figure de polarisation et fluctuations de densité	93
2.23	Paramètres de Stokes autour d'une perturbation scalaire	94
2.24	Paramètres de Stokes autour d'une perturbation tensorielle	95
2.25	Figures de polarisation autour des champs E et B	96
2.26	Géométrie de la diffusion Thomson	97
B.1	Exemples de configurations optimisées	112
1.1	Schéma de principe d'un bolomètre	122
1.2	Spectre de puissance typique d'un bolomètre	124
1.3	Séquence temporelle de bruit	125
2.1	Valeur de $\int_{-x}^x \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$	130
2.2	Filtrage du bruit par moyennage	131
2.3	Des scans aux cercles : $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}} = 1$, $\alpha = 1$ et $N = 10$	133
2.4	Des scans aux cercles : $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}} = 1$, $\alpha = 1$ et $N = 60$	133
2.5	Des scans aux cercles : $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}} = 1$, $\alpha = 2$ et $N = 10$	134
2.6	Des scans aux cercles : $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}} = 1$, $\alpha = 2$ et $N = 60$	134
2.7	Des scans aux cercles : $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}} = 10$, $\alpha = 1$ et $N = 60$	135
2.8	Des scans aux cercles : $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}} = 10$, $\alpha = 2$ et $N = 60$	135
2.9	Bruit blanc et striage	137
3.1	Intersections entre les cercles	139

3.2	Contraintes aux intersections	140
3.3	Cercle et géométrie	141
3.4	Conditions d'intersection	142
3.5	Cartes des intersections.	144
3.6	Système de référence et polarimètre	145
3.7	Disposition relative des polarimètres	146
3.8	Contributions galactiques et CMB	153
3.9	Carte de température du ciel simulée	155
3.10	Carte de polarisation Q du ciel simulée	155
3.11	Résidus de I pour du bruit blanc	156
3.12	Résidus de I pour du bruit basse fréquence sans destriage	156
3.13	Résidus de I pour du bruit basse fréquence avec moyenne nulle	157
3.14	Résidus de I pour du bruit basse fréquence avec destriage	157
3.15	Résidus de Q pour du bruit blanc	158
3.16	Résidus de Q pour du bruit basse fréquence sans destriage	158
3.17	Résidus de Q pour du bruit basse fréquence avec moyenne nulle	159
3.18	Résidus de Q pour du bruit basse fréquence avec destriage	159
3.19	Efficacité du destriage pour T avec $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}=1$	160
3.20	Efficacité du destriage pour E avec $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}=1$	161
3.21	Efficacité du destriage pour la corrélation ET avec $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}=1$	162
3.22	Efficacité du destriage pour T avec $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}=5$	162
3.23	Efficacité du destriage pour E avec $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}=5$	163
3.24	Efficacité du destriage pour la corrélation ET avec $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}=5$	163
3.25	Estimateur de striage résiduel	165
3.26	Corrélation angulaire résiduelle sur un cercle avec $\alpha \in \{0.5, 1\}$	166
3.27	Corrélation angulaire résiduelle sur un cercle avec $\alpha \in \{2, 3\}$	167
1.1	Les îles Canaries	171
2.1	L'expérience COSMOSOMAS	174
3.1	Données après filtrage du 50 Hz et soustraction des mauvaises données	176
3.2	Détermination de la forme de l'effet systématique	177

3.3	Carte de poids obtenue après 10 itérations	179
3.4	Résidus obtenus après 10 itérations	180
3.5	Détermination de la phase arbitraire à partir d'une source ponctuelle . . .	181
3.6	Détermination de la phase à partir de la galaxie	181
3.7	Calcul du déphasage entre la galaxie observée et la galaxie attendue	182
3.8	Carte du ciel obtenue à partir de la Fig. 3.4	183
3.9	Observations de Cygnus A	184
3.10	Ajustement de gaussiennes 2D non symétriques sur les lobes	185
3.11	Comparaison de nos lobes avec des lobes gaussiens symétriques	185
3.12	Photométrie d'ouverture comparative entre nos lobes réels et des lobes gaussiens symétriques	186
3.13	Spectre de Cygnus A	187
3.14	Comparaison de l'effet systématique avec l'effet atmosphérique	190
C.1	Erreur relative entre l'atmosphère exacte et l'approximation de l'atmo- sphère plane	204
D.1	Position moyenne de la Voie Lactée en coordonnées équatoriales	205

INTRODUCTION

C'était en 1964. Arno A. Penzias et Robert W. Wilson, des laboratoires Bell, utilisaient la plus sensible des antennes radio de l'époque pour des travaux de recherche sur la communication par satellite. Contre toute attente, ils découvrirent un signal parasite d'origine inexplicable, provenant de toutes les directions du ciel et constant dans le temps. Après avoir réexaminé soigneusement toutes les sources possibles de bruit (Voie Lactée, Soleil, défauts de connection dans l'antenne et même guano de pigeon), le signal persistait, un an après. La nouvelle s'est répandue lorsque Penzias discuta de cet excès de température avec Bernard Burke, du M.I.T. Ce dernier avait entendu parler des travaux de P.J.E. Peebles du groupe de R.H. Dicke à Princeton sur le rayonnement dans l'univers. À cette époque, ils étudiaient un modèle d'univers oscillant avec une phase très dense et très chaude. Ils pensaient que si le rayonnement présent à cette époque était suffisamment intense, alors il devrait être observable aujourd'hui — ils calculèrent que l'univers devrait être rempli d'un rayonnement de corps noir d'une température de l'ordre de 10 K. La collaboration entre Penzias, Wilson et le groupe de Princeton donna naissance à deux lettres dans la revue *Astrophysical Journal Letters* ; voici un extrait de celle de Penzias & Wilson (1965), annonçant leur découverte :

**A MEASUREMENT OF EXCESS ANTENNA
TEMPERATURE AT 4080 Mc/s**

Measurements of the effective zenith noise temperature of the 20-foot horn-reflector antenna at the Crawford Hill Laboratory, Holmdel, New Jersey, at 4080 Mc/s have yielded a value of about 3.5 K higher than expected. This excess temperature is, within the limits of our observations, isotropic, unpolarized, and free from seasonal variations (July, 1964 — April, 1965). A possible explanation for the observed excess noise temperature is the one given by Dicke et al. (1965) in a companion letter in this issue.

L'article de Dicke et de ses collaborateurs explique la provenance de ce rayonnement dans le cadre d'un univers en expansion à partir d'un état très dense et très chaud. La découverte de ce rayonnement fossile (qui se trouve dans le domaine submillimétrique) a fait la "une" du *New York Times* du 21 mai 1965.

Depuis, de très nombreuses expériences dédiées à la détection de ce rayonnement ont été mises en place pour confirmer les mesures de Penzias et Wilson, avec succès : l'univers est rempli d'un rayonnement de corps noir à une température d'environ 3 K. La première prédiction théorique de ce rayonnement est due à Gamow (1948) puis à Alpher & Herman (1948). Ainsi prirent fin, de façon pratiquement définitive, les luttes intestines entre les partisans du modèle de l'état stationnaire (Hoyle notamment) et ceux du *Big-Bang* (Gamow). Les inquiétudes qu'avait Fred Hoyle quand il déclarait en 1955 dans "Frontières de l'astronomie" : "*Il est suspect que dans ce modèle d'explosion aucune relique d'un état superdense de l'univers ne puisse être trouvée.*", sont donc levées, et sa théorie — déjà malmenée — perdait de plus en plus de crédibilité au profit de celle du *Big-Bang*. Pour cette raison, nous nous placerons dans la suite exclusivement dans le cadre de la théorie



Fig. 0.1: Penzias et Wilson en 1964, devant l'antenne des laboratoires Bell avec laquelle ils ont découvert le CMB.

du *Big-Bang*.

Une trentaine d'années s'est écoulée depuis la découverte du rayonnement fossile et le nombre d'expériences de tous types (au sol, en ballon ou embarquées à bord d'un satellite) ne cesse de s'accroître. Cet engouement pour l'étude du CMB (c'est l'acronyme anglais de *Cosmic Microwave Background*, que nous utiliserons toujours dans la suite) est justifié : ayant été émis quelques centaines de milliers d'années après le *Big-Bang*, il contient une très grande quantité d'informations sur les conditions qui régnaient à cette époque, comme, par exemple, la densité de baryons, la densité de photons, la densité de matière noire... Les premières observations sur de grandes portions de ciel ont montré que ce rayonnement est très homogène : les fluctuations de température ne sont que de 10^{-5} en valeur relative, mais c'est justement dans ces fluctuations qu'est inscrite toute la physique de l'univers tel qu'il était il y a une quinzaine de milliards d'années. C'est pourquoi la mesure précise des fluctuations du CMB permet de contraindre très fortement les différents modèles cosmologiques en compétition pour expliquer la formation des structures.

La première partie de cette thèse décrit certains aspects essentiels du modèle standard ; dans un premier temps, nous nous restreindrons à décrire un univers rigoureusement homogène et isotrope. Nous présenterons la relativité générale, le lien entre matière et énergie d'une part et géométrie de l'univers d'autre part et les paramètres importants utilisés pour caractériser notre univers, dits "paramètres cosmologiques". Nous élargirons ensuite notre propos pour considérer des petites inhomogénéités, nécessaires pour rendre compte des observations. Nous aborderons le problème de la génération de ces inhomogénéités puis étudierons leur évolution dans un univers dynamique ; ces inhomogénéités se couplent au rayonnement et se traduisent en fluctuations dans sa température, celles que nous observons dans le CMB. On s'attend à ce que ce rayonnement soit polarisé. Nous montrerons pour quelle raison il en est ainsi et nous définirons les paramètres de Stokes, qui permettent de la quantifier. Les propriétés de symétrie des paramètres de Stokes nous amèneront à introduire les champs de polarisation E et B : ce sont eux que l'on utilise lorsque l'on veut extraire la physique contenue dans la polarisation du CMB.

Pour accéder à cette information, il faut faire une étude statistique des cartes de température et de polarisation. l'Intermède A explique comment procéder et nous décrivons

les méthodes et les outils que nous avons développés pour y parvenir.

Nous aborderons ensuite un aspect plus instrumental. Nous verrons comment se fait la mesure de la polarisation et montrerons qu'il existe des configurations optimales pour mesurer les paramètres de Stokes. Ces configurations, moyennant certaines hypothèses sur les détecteurs, assurent que les erreurs sur les paramètres de Stokes sont minimales et décorréées. Ceci constitue l'Intermède B.

La deuxième partie concerne le traitement du bruit basses fréquences. Aux détecteurs couramment utilisés dans les expériences CMB, par exemple les bolomètres ou les HEMT (High Electron Mobility Transistor), est souvent associé un bruit basses fréquences, provenant essentiellement de l'électronique de lecture des détecteurs et de fluctuations thermiques. Nous verrons que la puissance de ce bruit est trop importante pour la négliger. Elle réduit considérablement la sensibilité de l'instrument et des méthodes doivent être inventées pour le soustraire efficacement. Dans le cas d'instruments balayant le ciel en décrivant des cercles, nous proposons une méthode utilisant les intersections entre les cercles. Cette méthode est exposée en détail dans cette partie.

Première partie

LE MODÈLE COSMOLOGIQUE DU *BIG-BANG*

1. L'UNIVERS HOMOGÈNE ET ISOTROPE

1.1 *Le principe cosmologique*

L'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire sur l'univers consiste à dire qu'il est homogène (invariance par translation) et isotrope (invariance par rotation) à grande échelle : c'est le principe cosmologique. Quelque soit la direction dans laquelle on regarde, on constate que l'univers est *statistiquement* identique. Il est bien évident qu'à petite échelle l'univers est loin de l'homogénéité. C'est en partie pour vérifier ce principe que des équipes sondent l'univers sur des distances de plus en plus grandes. Si, sur des échelles

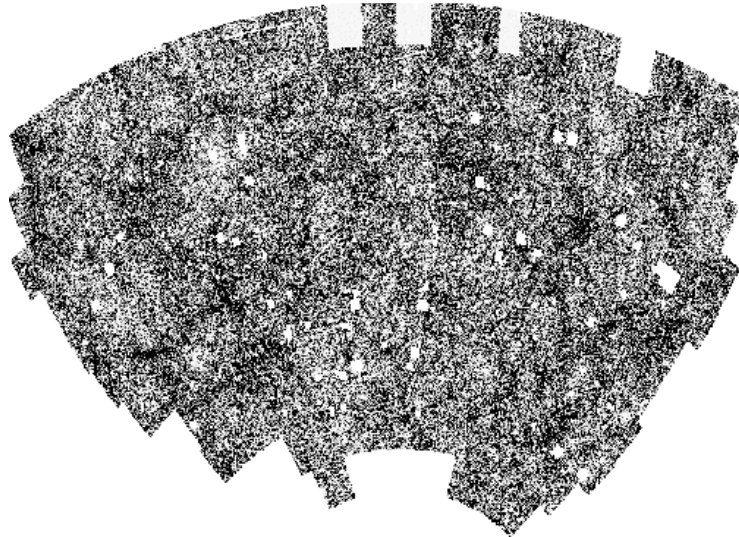


Fig. 1.1: Répartition de 2 millions de galaxies autour du pôle Sud galactique. La taille de cette portion de ciel est de 50° sur 100° correspondant à $1/10$ du ciel. La qualité des mesures permet de sonder jusqu'à 1 Gpc environ. (APM survey. Steve Maddox, Will Sutherland, George Efstathiou and Jon Loveday, Astrophysics Dept, Oxford University).

de l'ordre de 100 Mpc les galaxies semblent réparties de façon inhomogène suivant une structure filamentaire, il n'en est plus de même aux échelles de l'ordre du Gpc (et au-delà). Les catalogues de galaxies se complètent grâce à des collaborations comme le SDSS ("Sloan Digital Sky Survey") ou le 2dF ("2 degrees Fields"). L'univers est sondé sur des distances de plus en plus profondes et nous nous rapprochons de plus en plus d'une distribution homogène des galaxies. L'uniformité est bien plus flagrante si l'on considère une carte du ciel du CMB, correspondant à une distance supérieure à 6 Gpc : la température du ciel est la même quelque soit la ligne de visée à 10^{-5} près (voir Fig. 1.2). D'un point de vue théorique, l'acceptation de ce principe réduit considérablement le nombre de cosmologies possibles. La théorie utilisée pour décrire l'évolution de l'univers est la relativité générale.

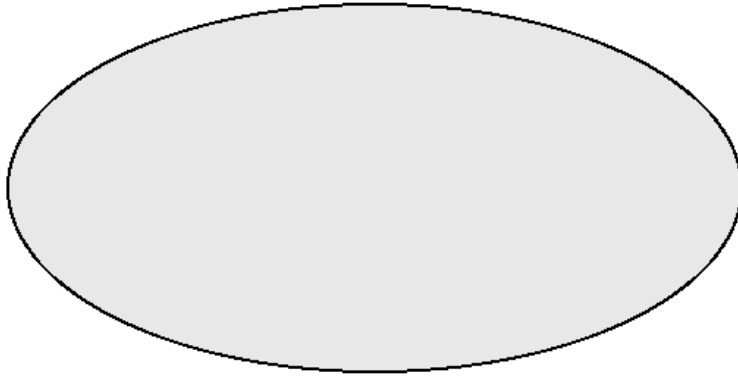


Fig. 1.2: Le rayonnement fossile, en faveur du principe cosmologique. Cette carte est celle du rayonnement fossile, avec une échelle linéaire de couleurs telle que le noir vaut 0 et le gris 2.73. C'est une image de l'univers tel qu'il était quelques centaines de milliers d'années après le *Big-Bang*, correspondant à une distance de quelques Gpc par rapport à nous. Les fluctuations ne sont que de quelques centièmes de millièmes autour de 2.73 et sont invisibles ici, ce qui constitue l'un des arguments les plus forts en faveur du principe cosmologique.

Nous allons en voir certains aspects dans la section suivante.

1.2 La relativité

Dans la théorie du *Big-Bang*, l'univers a été, dans sa jeunesse, très dense. À cette époque, mêmes les forces à très courte portée ont eu une influence sur sa structure. Cependant, cette période a peu duré par rapport à son âge total. Les interactions à longue portée sont celles qui étaient, sont et seront dominantes. Ce sont celles-ci qui déterminent la structure et l'évolution de l'univers. Or des 4 interactions fondamentales, seules 2 sont à grande portée : la gravitation et l'électromagnétisme. Les forces nucléaires faibles et fortes sont à courte portée et ne peuvent donc jouer aucun rôle sur l'évolution de l'univers à grande échelle. Quant à la force électro-magnétique, l'existence de charges électriques positives et négatives implique que la résultante des forces va être négligeable sur de grandes échelles (effet d'écrantage). Seule la gravitation est donc susceptible d'avoir *aujourd'hui* une influence sur l'évolution et la structure de l'univers. La meilleure théorie de la gravitation dont nous disposons aujourd'hui est la relativité générale d'Einstein : elle n'a jusque là été contredite par aucune observation. Elle ne repose pas sur le principe cosmologique car c'est une théorie *locale* alors que le principe cosmologique émet des hypothèses *globales*.

1.2.1 Vers la relativité générale

Un *événement* est décrit dans l'*espace-temps* par 4 coordonnées : trois d'espace et une de temps. En relativité restreinte, on définit l'*intervalle* entre deux événements infiniment proches (t, x, y, z) et $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$ par la quantité :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

ds est *invariant* par changement de coordonnées (groupe de Poincaré) et la trajectoire d'un rayon lumineux est caractérisée par l'équation :

$$ds = 0. \quad (1.1)$$

La trajectoire de particules matérielles entre deux événements quelconques est telle que la quantité :

$$\int_{\text{trajectoire}} ds \text{ est stationnaire.} \quad (1.2)$$

Cette intégrale est minimale quand la trajectoire suivie minimise la distance à parcourir pour aller d'un événement à l'autre : c'est la ligne droite. Ceci s'applique à toutes les particules *libres*, c'est-à-dire ne subissant pas l'influence de forces extérieures comme la gravitation ou l'électromagnétisme. En présence de ces forces, la trajectoire diffère de la ligne droite. La caractéristique essentielle de la gravitation est qu'elle communique la même accélération à tous les corps, quelque soit leur masse. L'idée d'Einstein a donc été de dire que la gravitation s'inscrit dans la géométrie de l'univers, qu'elle est due à la matière et que toutes les particules se déplacent *librement* dans cet espace-temps empreint de gravitation. L'espace-temps de Minkowski de la relativité restreinte (pseudo-euclidien) cède la place à un autre espace-temps dont les caractéristiques dépendent de la présence ou de l'absence d'un champ gravitationnel. La première étape consiste à généraliser la forme de la métrique.

1.2.2 Relativité générale

L'intervalle séparant deux événements de la relativité restreinte est modifiée : le nouvel intervalle doit faire intervenir la géométrie de l'espace-temps puisque nous voulons une théorie géométrique de la gravitation. Il s'écrit de la manière suivante¹ :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

$g_{\alpha\beta}$ s'appelle le *tenseur métrique* et la valeur de ses composantes (10 sont indépendantes sur les 16 qu'il contient car il est symétrique) dépend de la gravitation. Nous voyons donc que la relativité générale est une théorie *géométrique* de la gravitation. Les équations d'Einstein ne nous fournissent que 6 équations indépendantes. Ceci est dû au fait que la physique est invariante par changement de coordonnées : c'est l'invariance de jauge. Les 4 degrés de liberté restants doivent être fixés, il faut choisir une jauge, c'est-à-dire choisir un système de coordonnées. Pour une particule libre ponctuelle, la trajectoire rendant l'intégrale 1.2 stationnaire s'appelle *géodésique* et obéit à l'équation :

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0 \quad (1.3)$$

¹ On utilise la convention des indices répétés ; les indices grecs vont de 0 à 3 et les indices latins de 1 à 3. Un événement s'écrit désormais formellement : x^μ où x^0 est la coordonnée de temps et x^1, x^2, x^3 sont les coordonnées d'espace.

ou encore

$$\begin{aligned} \frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma &= 0 \\ u^\alpha &\equiv \frac{dx^\alpha}{ds} \\ u^2 &= 1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

où u^α est la quadri-vitesse de la particule.

Dans cette équation, $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ est un *symbole de Christoffel* et est relié au tenseur métrique par la relation² :

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (g_{\rho\beta,\gamma} + g_{\rho\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\rho}). \quad (1.5)$$

Le tenseur de Riemann-Christoffel est donné par :

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (g_{\beta\gamma,\alpha\delta} + g_{\alpha\delta,\beta\gamma} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta}) + g_{\mu\nu} (\Gamma_{\alpha\delta}^\mu \Gamma_{\beta\gamma}^\nu - \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \Gamma_{\beta\delta}^\nu). \quad (1.6)$$

Les tenseur et scalaire de Ricci sont définis par :

$$R_{\alpha\beta} = R^\mu_{\alpha\mu\beta} \quad (1.7)$$

$$= \Gamma_{\alpha\beta,\rho}^\rho - \Gamma_{\alpha\rho,\beta}^\rho + \Gamma_{\gamma\rho}^\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \Gamma_{\beta\gamma}^\rho \Gamma_{\alpha\rho}^\gamma \quad (1.8)$$

$$\text{et : } R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = R_\alpha{}^\alpha. \quad (1.9)$$

La gravitation apparaît comme une courbure de l'espace-temps qui prend sa source dans la matière présente. Ceci est exprimé dans l'équation d'Einstein qui relie le tenseur de Ricci (purement géométrique, il rend compte de la courbure) et le tenseur énergie-impulsion (purement "physique", il décrit la distribution de matière). Cette équation s'écrit :

$$\boxed{R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 8\pi G T_{\alpha\beta}} \quad (1.10)$$

où $T_{\alpha\beta}$ est le tenseur énergie-impulsion. Appliquée dans la limite du champ de gravitation faible, on retrouve l'équation de Poisson newtonienne : $\Delta\phi = 4\pi G \rho$. Lorsqu'Einstein a obtenu cette équation, il a remarqué qu'elle menait naturellement à un univers *non statique*. Ce résultat étant contraire à ses convictions (croyances?), il ajouta, sans aucune motivation physique, un terme capable de rendre l'univers artificiellement statique : c'est la constante cosmologique. Quelques années plus tard, Hubble³ a montré que l'univers était en expansion (Hubble, 1929). Einstein l'apprenant, qualifia sa constante cosmologique de "plus grande erreur de [sa] vie" : il aurait pu prédire que l'univers n'était pas statique avant les observations de Hubble. S'il avait vécu jusqu'à aujourd'hui, peut-être reviendrait-il à nouveau sur sa constante cosmologique, qui n'est probablement pas si nulle que ça (voir page 21). Mathématiquement, la constante cosmologique se traduit par l'apparition du terme $\Lambda g_{\alpha\beta}$ dans le membre de droite de l'équation 1.10.

² La virgule symbolise la dérivation par rapport à la variable écrite juste derrière :

$$A^\mu_{,\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\nu A^\mu.$$

³ Lemaître avait trouvé ce résultat peu de temps avant avec les données de Hubble.

Les identités de Bianchi, qui sont des relations purement géométriques puisqu'elles ne font intervenir que le tenseur métrique, s'écrivent :

$$\left(R^\alpha_\beta - \frac{1}{2} g^\alpha_\beta R \right)_{;\alpha} = 0 \quad (1.11)$$

et entraînent la conservation du tenseur énergie-impulsion :

$$T^\alpha_{\beta ;\alpha} = 0 \quad (1.12)$$

où le point-virgule symbolise la dérivée covariante. On trouvera une description exhaustive de la relativité générale dans Weinberg (1972) et Misner et al. (1973) par exemple. Une très bonne introduction est donnée dans Peebles (1993).

1.3 L'univers de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Nous souhaitons maintenant utiliser la relativité générale dans le cadre de la cosmologie. Pour cela, il nous faut construire la métrique qui nous permettra, par la suite, d'obtenir les équations de la dynamique dans un univers régit par la gravitation. Pour construire cette métrique, nous allons lui imposer de respecter le principe cosmologique, c'est-à-dire de la contraindre en lui imposant de respecter des symétries.

1.3.1 Métrique

L'adhésion au principe cosmologique revient à supposer qu'il existe une classe d'observateurs auxquels l'univers apparaît homogène et isotrope. Dans la suite, nous appellerons ces observateurs *observateurs fondamentaux*. Un autre observateur, en translation rectiligne et uniforme par rapport à ces observateurs fondamentaux, verra un univers anisotrope. On utilise donc le système de coordonnées des observateurs fondamentaux (t, x^i) . Nous allons traduire en termes géométriques les notions d'isotropie et d'homogénéité. L'intervalle entre deux événements s'écrit :

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + 2g_{0i} dt dx^i - \sigma_{ij} dx^i dx^j$$

où σ_{ij} est une métrique spatiale définie positive. On adopte un système d'unités dans lequel $c = 1$. L'isotropie de l'espace implique que les composantes g_{0i} s'annulent et donc qu'il n'existe aucune direction privilégiée définie par le 3-vecteur g_{0i} . Pour ce qui est de la composante temporelle, nous la définissons de telle manière que $g_{00} = 1$. L'intervalle d'espace-temps s'écrit donc :

$$ds^2 = dt^2 - \sigma_{ij} dx^i dx^j = dt^2 - dl^2$$

L'isotropie signifie qu'il existe un système de coordonnées tel qu'en tout point de l'univers on ait une symétrie sphérique et donc la métrique peut être écrite :

$$dl^2 = a(t)^2 \left(f^2(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right).$$

La fonction f dépendant de r s'obtient en écrivant que la courbure spatiale R_i^i est constante dans l'espace. On trouve alors que :

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{R_i^i}{6}.$$

$\kappa \in \{-1; 0; 1\}$ est la courbure spatiale selon que l'univers est ouvert (hyperbolique), plat ou fermé (sphérique). La métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker s'écrit donc :

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right). \quad (1.13)$$

Le facteur d'échelle a est une fonction du temps dépendant du contenu de l'univers et que l'on détermine à partir des équations d'Einstein. Une fonction a croissante correspond à un univers en expansion, décroissante à un univers en contraction et constante, à un univers statique.

1.3.2 Dynamique

Munis de cette métrique, intéressons-nous au facteur d'échelle a dans un univers rempli d'un fluide parfait. Le tenseur énergie-impulsion d'un tel fluide s'écrit :

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta} \quad (1.14)$$

p et ρ sont les pression et densité d'énergie (constantes) du fluide et u^α sa quadri-vitesse. Dans le système de coordonnées des observateurs fondamentaux, le fluide est au repos partout. Ce système est celui des coordonnées comobiles. Le calcul des tenseurs de courbure et l'équation d'Einstein donnent les équations de Friedmann :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.15)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.16)$$

$$\text{avec } \dot{a} \equiv \frac{da}{dt}.$$

On peut réécrire la première de la façon suivante :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_{\text{courbure}} + \rho_{\text{vide}})$$

avec

$$\rho_{\text{courbure}} = -\frac{3\kappa}{8\pi G a^2} \quad \text{et} \quad \rho_{\text{vide}} = \frac{\Lambda}{8\pi G}.$$

La conservation du tenseur énergie-impulsion (Eq.1.12) donne :

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (1.17)$$

La densité d'énergie ρ intervenant ici est celle de toute la matière : relativiste (ρ^{R}) et non-relativiste (ρ^{NR}) ; on a donc $\rho = \rho^{\text{R}} + \rho^{\text{NR}}$. Les densités d'énergie associées à la courbure et à la constante cosmologique (ρ_{courbure} et ρ_{vide}) *n'entrent pas dans* ρ . Cette équation est équivalente à celle obtenue en appliquant le premier principe de la thermodynamique à un volume V d'univers en expansion :

$$d(\rho V) + Vdp = 0 = d((\rho + p)a^3) - a^3 dp. \quad (1.18)$$

Elle traduit la conservation de l'entropie au cours de l'expansion de l'univers (voir aussi page 33, où ce résultat est démontré pour une espèce de particules soumises à l'expansion).

Comme seules 2 parmi les 3 équations 1.15, 1.16 et 1.17 sont indépendantes (on trouve l'Eq. 1.17 en dérivant par rapport au temps l'Eq. 1.15 et en faisant apparaître l'Eq. 1.16), on ne peut pas déterminer à la fois $\rho(t)$, $p(t)$ et $a(t)$. Il nous faut en plus une équation d'état de la matière $p = p(\rho)$.

On peut alors résoudre pour différentes équations d'état :

- **domination de la matière non-relativiste :**

$p^{\text{NR}} = 0$, $\rho^{\text{NR}} \gg \rho^{\text{R}}$. L'Eq. 1.17 devient :

$$\dot{\rho}^{\text{NR}} = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho^{\text{NR}} \quad (1.19)$$

c'est-à-dire :

$$\rho^{\text{NR}} \propto a^{-3}.$$

Dans un univers dominé par la matière non-relativiste, la densité d'énergie est, comme on pouvait s'y attendre, inversement proportionnelle au volume. Connaissant cette dépendance, on est en mesure de résoudre l'équation de Friedmann 1.15, *en supposant en plus que la courbure est négligeable, ainsi que la constante cosmologique :*

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{\text{matière}}$$

soit

$$\boxed{a(t) \propto t^{2/3}} \quad \text{pour la solution en expansion uniquement.}$$

Il existe une solution décrivant un univers en contraction⁴ mais elle ne correspond pas à notre univers actuel, nous l'oublions donc par la suite.

- **domination du rayonnement :**

$p^{\text{R}} = \rho^{\text{R}}/3 \gg \rho^{\text{NR}}$. De même, l'Eq. 1.17 devient :

$$\dot{\rho}^{\text{R}} = -4\frac{\dot{a}}{a}\rho^{\text{R}}$$

c'est-à-dire :

$$\rho^{\text{R}} \propto a^{-4}.$$

En supposant de plus que la courbure est négligeable (ce qui est valable pour des valeurs faibles du facteur d'échelle a), ainsi que la constante cosmologique, l'équation de Friedmann 1.15 s'écrit :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho^{\text{R}}$$

soit

$$\boxed{a(t) \propto t^{1/2}} \quad \text{pour la partie en expansion uniquement.}$$

De même, il existe une solution décrivant un univers en contraction⁵ et, comme précédemment, nous ne nous y intéresserons pas.

- **domination de la courbure (cas d'un univers ouvert) :**

$\rho_{\text{courbure}} \gg \rho$ et ρ_{vide} . Le cas d'un univers ouvert correspond à une valeur de κ négative pour que $\rho_{\text{courbure}} > 0$. L'équation de Friedmann 1.15 s'intègre facilement en :

$$\boxed{a(t) \propto t} \quad (\text{puisque } \dot{a} = \sqrt{-\kappa} = \text{constante positive}).$$

⁴ Elle s'écrit $a \propto (t_d - t)^{2/3}$.

⁵ Elle s'écrit $a \propto (t_d - t)^{1/2}$.

– **domination de la constante cosmologique :**

$\rho_{\text{vide}} \gg \rho$ et ρ_{courbure} . Le terme ρ_{vide} est $\Lambda/(8\pi G)$. L'équation de Friedmann 1.15 se simplifie en :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} \equiv H^2$$

qui s'intègre en :

$$a(t) \propto e^{\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right)} = e^{Ht}.$$

Un univers dominé par une constante cosmologique positive croît de façon exponentielle.

Remarque sur la constante cosmologique : comme nous l'avons vu précédemment, l'équation d'Einstein 1.10 la plus générale peut s'écrire :

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 8\pi G T_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta}$$

ou encore

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 8\pi G \tilde{T}_{\alpha\beta} \quad \text{avec} \quad \tilde{T}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\alpha\beta} = -\tilde{p} g_{\alpha\beta} + (\tilde{p} + \tilde{\rho}) u_{\alpha} u_{\beta}.$$

Les pression et densité d'énergie effectives sont :

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= p - \frac{\Lambda}{8\pi G} \\ \text{et } \tilde{\rho} &= \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G} \end{aligned}$$

Les équations de Friedmann 1.15 et 1.16 s'écrivent avec ces nouvelles variables :

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi}{3} G (\tilde{\rho} + 3\tilde{p}) \\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3} \tilde{\rho} - \frac{\kappa}{a^2}; \end{aligned}$$

la constante cosmologique n'intervient plus explicitement, elle est absorbée dans \tilde{p} et $\tilde{\rho}$. Einstein, qui souhaitait un univers statique, a dû imposer que $\dot{a} = 0$ et $\ddot{a} = 0$. Ceci est possible si :

$$\tilde{\rho} = -3\tilde{p} = \frac{3\kappa}{8\pi G a^2}.$$

Pour un univers matériel dans lequel $p = 0$, on obtient dans ce cas,

$$\Lambda = \frac{\kappa}{a^2} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{\kappa}{4\pi G a^2}.$$

Puisque $\rho > 0$, on doit avoir $\kappa = +1$ et donc $\Lambda > 0$. La valeur de Λ qui rend l'univers statique est donc :

$$\Lambda_{\text{Einstein}} = 4\pi G \rho.$$

Cet univers, dit univers d'Einstein, est en fait instable car la constante cosmologique tend à agrandir l'espace (force répulsive) alors que la gravitation tend à le rétrécir (force attractive). Un équilibre local peut bien sûr être atteint — c'est ce que nous venons de

montrer — mais une légère fluctuation donnant l'avantage à l'un des deux suffit à écarter l'univers de plus en plus d'un état d'équilibre, ce qui a pour effet d'accroître d'avantage la fluctuation etc... : l'univers n'est plus statique. Bien que cette constante cosmologique n'ait eu aucune raison d'être (elle a été introduite “à la main” par Einstein), aucune observation ne peut exclure les modèles cosmologiques dans lesquels $\Lambda \neq 0$, bien au contraire.

L'univers de de Sitter quant à lui décrit l'évolution d'un univers vide ($p = 0$, $\rho = 0$) et plat ($\kappa = 0$). On trouve dans ce cas :

$$\tilde{p} = -\tilde{\rho} = -\frac{\Lambda}{8\pi G},$$

qui, injectée dans l'équation de Friedmann 1.15, donne :

$$\dot{a}^2 = \frac{\Lambda}{3} a^2.$$

Cette équation a une solution exponentielle :

$$a(t) \propto e^{(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t)} = e^{Ht}.$$

Dans cet univers particulier, la constante de Hubble est une vraie constante, elle ne dépend pas du temps. Le facteur d'échelle croît de manière exponentielle. Jusqu'à il y a une vingtaine d'années, cet univers de de Sitter n'avait que peu d'intérêt car il décrit un univers vide. Il a maintenant une grande importance puisque les modèles d'inflation font intervenir des périodes durant lesquelles l'expansion de l'univers est exponentielle ; ceci se produit lorsque le fluide dominant a pour équation d'état $p = -\rho$. On pense que notre univers a connu une telle phase d'expansion, appelée *inflation* dans ses tout premiers instants (voir page 52).

Nous avons vu que la densité d'énergie de matière variait en a^{-3} alors que la densité de rayonnement variait en a^{-4} . Il existe donc un instant t_{eq} auquel les densités de matière et de rayonnement étaient égales. C'est l'instant d'*égalité matière-rayonnement*. Avant cette transition le rayonnement dominait. Le tableau 1.1 résume les résultats seulement pendant une période de temps où l'espèce considérée est dominante.

Tab. 1.1: Évolution de l'univers selon la nature de l'espèce dominante.

équation d'état	domination	ρ	a	époque
$p = \rho/3$	radiation	$\propto 1/a^4$	$\propto t^{1/2}$	avant t_{eq}
$p = 0$	matière	$\propto 1/a^3$	$\propto t^{2/3}$	après t_{eq}
—	courbure κ/a^2 , $\kappa > 0$	—	$\propto t$	aujourd'hui ?
$p = -\rho$	vide	—	$\propto e^{Ht}$	inflation ¹

¹ Il semblerait que nous soyons actuellement dans un univers dominé par la constante cosmologique, donc que nous sommes dans une période d'inflation éternelle (voir les résultats des supernovæ de type Ia, page 21).

1.3.3 Loi de Hubble et redshift

Nous allons dans cette partie étudier l'effet de l'expansion de l'univers sur les distances et introduire la notion de redshift. Nous allons voir qu'il existe différentes façons de définir la distance dans un univers dynamique.

Loi de Hubble

Nous allons tout d'abord définir la *distance propre*. Imaginons qu'une infinité d'observateurs se trouvent sur la géodésique reliant deux points distincts P et P_0 . Supposons ensuite qu'au même instant t , tous ces observateurs fassent leur mesure de distance infinitésimale et qu'un coordinateur fasse la somme de tous les résultats. Alors la distance ainsi obtenue est la distance propre séparant les points P et P_0 . Elle a un sens physique bien défini mais elle n'est pas mesurable. Formellement, on reprend la métrique de l'Eq. 1.13 dans laquelle on pose $dt = 0$, $d\theta = 0$ et $d\phi = 0$:

$$d_{\text{propre}}(t) = \sqrt{|ds^2|} = a(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - \kappa r'^2}} = a(t) g(r)$$

où

$$g(r) = \begin{cases} \arcsin r, & \text{si } \kappa = 1 \\ r, & \text{si } \kappa = 0 \\ \operatorname{argsinh} r, & \text{si } \kappa = -1 \end{cases}.$$

Nous voyons que la distance propre entre deux observateurs fondamentaux peut varier dans le temps à cause du facteur d'échelle. Leur distance *comobile*, $g(r)$ est par contre constante. Si t_0 désigne l'instant présent :

$$d_{\text{propre}}(t_0) = a(t_0) g(r) = \frac{a(t_0)}{a(t)} d_{\text{propre}}(t).$$

La vitesse radiale de P par rapport à P_0 est :

$$v_r(t) = \dot{a} g(r) = H(t) d_{\text{propre}}(t). \quad (1.20)$$

où la fonction $H = \dot{a}/a$, est la constante de Hubble (bien qu'elle dépende du temps). Sa valeur actuelle ($H(t_0) = H_0$) est connue avec une précision assez faible :

$$50 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1} \leq H_0 \leq 80 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1} ;$$

nous utiliserons principalement le paramètre h défini par :

$$h = \frac{H_0}{100 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}}.$$

Redshift

En pratique, on ne parle que rarement des distances entre objets. La grandeur la plus couramment employée pour rendre compte de l'éloignement d'un objet est le redshift (décalage vers le rouge). En 1929, Edwin Hubble présente ses mesures de distances de galaxies (qu'il appelle "nébuleuses" à l'époque) et montre qu'elles s'éloignent les unes des

autres dans toutes les directions (Hubble, 1929). Il a en effet remarqué que les spectres des galaxies observées étaient presque systématiquement décalés vers le rouge ; l'interprétation de ce résultat en terme d'effet Doppler montre que les galaxies s'éloignent de celui qui les observe. Il a montré plus tard que le redshift d'une galaxie est proportionnel à sa distance à l'observateur. L'interprétation en terme d'effet Doppler n'est valable qu'aux faibles distances, auxquelles on a approximativement :

$$z \sim \frac{Hd}{c} = \frac{v}{c}. \quad (1.21)$$

D'une façon générale, le redshift z se définit de la manière suivante. Considérons un observateur situé en O à l'instant t_0 . Cet observateur est l'origine du système de coordonnées. Considérons une source lumineuse se trouvant à la coordonnée comobile fixe r . L'observateur reçoit de cette source à l'instant t_0 une onde dont la longueur est λ_0 . Cette onde a été émise par la source à l'instant $t_e < t_0$ avec une longueur d'onde λ_e . L'onde lumineuse émise se propage suivant une géodésique (voir Eq. 1.1), on a donc :

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - \kappa r'^2}} = g(r). \quad (1.22)$$

La crête suivante de l'onde a été émise par la source à $t_e + \delta t_e$; elle arrive à l'observateur à l'instant $t_0 + \delta t_0$. Comme source et observateur sont immobiles l'un par rapport à l'autre (en terme de coordonnée comobile r), on a :

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = g(r) = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}.$$

Pour les ondes lumineuses, les intervalles de temps δt_e et δt_0 sont très petits, de l'ordre de 10^{-14} s, de sorte que l'on peut considérer que le facteur d'échelle reste approximativement constant sur de si courtes durées ⁶. On obtient ainsi :

$$\frac{\delta t_0}{a_0} = \frac{\delta t_e}{a_e}, \quad (1.23)$$

soit, avec $\delta t_e = 1/\nu_e$ et $\delta t_0 = 1/\nu_0$ (ν_e et ν_0 sont les fréquences émises et reçues respectivement),

$$\nu_e a_e = \nu_0 a_0$$

ou encore

$$\frac{a_e}{\lambda_e} = \frac{a_0}{\lambda_0}.$$

Ce qui nous donne la définition du redshift :

$$\boxed{1 + z = \frac{a_0}{a_e}} \quad \text{ou} \quad \boxed{z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_0}}. \quad (1.24)$$

Les Eqs. 1.20 et 1.21 reliant la vitesse d'un objet avec sa distance montrent que plus un objet est loin d'un observateur donné et plus il s'en éloigne vite ; si cet objet est

⁶ On montre que cette approximation est correcte si $\delta t_e \ll 2/H(t_e)$ soit $\delta t_e \ll 2t_U/\alpha$ si $a(t) \propto t^\alpha$. t_U est ici l'âge de l'univers. $\delta t_e \sim 10^{-14}$ s donc l'approximation est valable dès le début de l'univers, toujours dans l'hypothèse où l'on a $a(t) \propto t^\alpha$.

suffisamment loin, il peut même s'éloigner de l'observateur avec une vitesse supérieure à celle de la lumière. Le principe de relativité n'est cependant pas violé puisque cette vitesse ne correspond pas à un échange d'information physique. La Fig. 1.3 montre la corrélation entre la vitesse de supernovæ (on a en fait accès directement à leur redshifts mais ceux-ci étant faibles, on peut les associer à une vitesse par $v \sim cz$) et leur distance de luminosité (voir sa définition page 21). Pour des objets proches, comme ces supernovæ, la distance de luminosité et la distance propre sont pratiquement identiques. Les données proviennent de Hamuy et al. (1996).

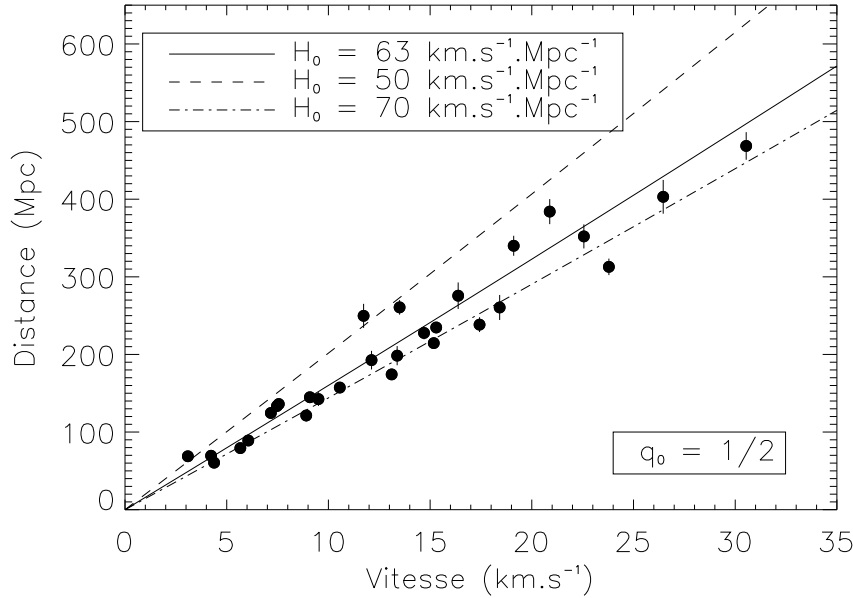


Fig. 1.3: Loi de Hubble. La vitesse des supernovæ en abscisse est en fait le produit du redshift z (voir Eq. 1.24) par la vitesse de la lumière c . Cette approximation est relativement correcte pour les z faibles (c'est-à-dire associer le redshift d'un objet à un effet Doppler). Il existe bien une constante de proportionnalité entre la distance de luminosité et la vitesse, cette constante est $1/H_0$ où H_0 est la constante de Hubble. Trois droites sont superposées aux valeurs expérimentales pour différentes valeurs de H_0 . La valeur de $63 \pm 8 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$ est le meilleur fit de Hamuy et al. (1996). Dans ces trois cas, le paramètre de décélération q_0 (voir page 20) est $1/2$.

1.3.4 Paramètres cosmologiques

Si l'univers était spatialement plat et sans constante cosmologique, l'équation de Friedmann 1.15 prendrait la forme :

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 \frac{\rho}{\rho_c},$$

ce qui définit la densité critique :

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

La densité critique actuelle, ρ_{c0} , est égale à

$$\rho_{c0} \sim 10^{-29} h^2 \text{ g.cm}^{-3}, \quad (1.25)$$

équivalent à 11 protons par mètre cube environ. Si $\rho > \rho_c$, l'univers est fermé à courbure positive, et ouvert à courbure négative dans le cas contraire. On note habituellement Ω_m le rapport ρ/ρ_c de la densité d'énergie (matière *et* rayonnement) à la densité critique.

D'une façon plus générale, en présence de courbure et de constante cosmologique, on a :

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H^2 \frac{\rho}{\rho_c} - H^2 \frac{\kappa}{a^2 H^2} + H^2 \frac{\Lambda}{3H^2}. \quad (1.26)$$

On introduit alors les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \Omega_\kappa &= \frac{\kappa}{a^2 H^2} \\ \text{et } \Omega_\Lambda &= \frac{\Lambda}{3H^2}, \end{aligned}$$

de sorte que l'équation de Friedmann devient :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H^2 (\Omega_m - \Omega_\kappa + \Omega_\Lambda)$$

soit :

$$\boxed{\Omega_\kappa = \Omega_m + \Omega_\Lambda - 1}. \quad (1.27)$$

La courbure de l'univers Ω_κ est donc directement liée à la densité de matière et de rayonnement Ω_m et à la constante cosmologique Ω_Λ . On voit clairement que si $\Omega_m + \Omega_\Lambda > 1$ alors l'univers est fermé ($\kappa = 1$), si $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ l'univers est plat ($\kappa = 0$) et ouvert si $\Omega_m + \Omega_\Lambda < 1$ ($\kappa = -1$). La connaissance de la somme $\Omega_m + \Omega_\Lambda$ nous permettra de prédire l'avenir de l'univers. On peut exprimer ces équations en fonction du redshift. Il suffit pour cela d'écrire les dépendances en z des différents Ω :

$$\begin{cases} \Omega_m = \Omega^R + \Omega^{NR} = \frac{H_0^2}{H^2} (\Omega_0^R (1+z)^4 + \Omega_0^{NR} (1+z)^3) \\ \Omega_\Lambda = \frac{H_0^2}{H^2} \Omega_{0\Lambda} \\ \Omega_\kappa = \frac{H_0^2}{H^2} (1+z)^2 \Omega_{0\kappa} \end{cases} \quad (1.28)$$

où l'exposant R représente la contribution des espèces relativistes à la densité de matière et NR représente celle des espèces non relativistes. Les contributions relativistes et/ou non relativistes de la matière noire sont incluses dans ces Ω . Le terme Ω_0^R apparaît avec un facteur $(1+z)^4$ car la densité d'énergie de particules relativistes est proportionnelle à la puissance quatrième de leur température, elle-même inversement proportionnelle au facteur d'échelle a (voir page 35). De même, le terme Ω_0^{NR} apparaît avec un facteur $(1+z)^3$ car la densité d'énergie d'une espèce non-relativiste est tout simplement proportionnelle à l'inverse du volume comobile $1/a^3$. Notons que pour des redshifts grands, la densité d'énergie des particules relativistes domine, suivie par celle des particules non-relativistes. Il existe un redshift pour lequel ces deux densités sont égales, on l'appelle redshift d'égalité matière-rayonnement et nous le notons z_{eq} . La densité de matière non-relativiste est donnée par :

$$\rho_m = \rho_{c0} (1+z)^3 \Omega_0^{NR} \quad \text{avec} \quad \rho_{c0} \sim 10^{-29} \text{ g.cm}^{-3},$$

tandis que celle des espèces relativistes s'écrit :

$$\rho_r = \frac{\pi^2}{30} \frac{k^4}{\hbar^3 c^3} g_*(T) T^4 = \rho_{0r} \frac{g_*(T)}{g_*(T_0)} (1+z)^4 \quad \text{avec} \quad \rho_{0r} \sim 10^{-33} \text{ g.cm}^{-3},$$

où la fonction $g_*(T)$, définie page 34, est égale au nombre effectif de degrés de liberté (le facteur de spin) des espèces relativistes lorsque la température de l'univers était égale à T . z_{eq} s'obtient facilement en égalant ces deux densités d'énergie, et on aboutit à :

$$\boxed{1 + z_{\text{eq}} = \frac{\rho_r}{\rho_m} \sim 10^4 \Omega_0^{\text{NR}} h^2}.$$

Pour des valeurs standard de Ω_0^{NR} (~ 0.2) et de h (~ 0.65), on trouve $z_{\text{eq}} \sim 2000$. Les Eqs. 1.28 nous permettent d'écrire l'équation de Friedmann sous la forme :

$$\begin{aligned} H^2 &= H_0^2 \times \underbrace{(\Omega_0^{\text{R}}(1+z)^4 + \Omega_0^{\text{NR}}(1+z)^3 - \Omega_{0\kappa}(1+z)^2 + \Omega_{0\Lambda})}_{E(z)^2} \\ &= H_0^2 \times E(z)^2 \end{aligned} \quad (1.29)$$

Cette expression est exacte et a le mérite de faire apparaître explicitement toutes les densités d'énergie à travers les Ω . On utilise également un autre paramètre, noté q , qui quantifie le taux d'accélération ou de décélération de l'univers. Sa valeur actuelle, q_0 , s'exprime simplement en fonction des paramètres cosmologiques. Il est défini par l'équation :

$$a(t) = a_0 \left(1 + H_0 (t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots \right) \quad (1.30)$$

où t est proche de t_0 et avec :

$$q_0 = q(t = t_0) \hat{=} - \frac{\ddot{a}(t_0)}{\dot{a}(t_0)^2} a_0.$$

Son expression en fonction des paramètres cosmologiques s'obtient en écrivant l'équation de Friedmann 1.16 à notre époque ($t = t_0$) :

$$\frac{\ddot{a}_0}{a_0} = -\frac{4\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3}$$

puisque notre univers actuel n'est plus dominé par le rayonnement ($p \sim p_{\text{matière}} = 0$). On a donc :

$$\frac{\ddot{a}_0}{a_0} = -\frac{1}{2} H_0^2 \Omega_{m0} + \frac{\Lambda}{3} \quad \text{avec} \quad \Omega_{m0} \sim \Omega_0^{\text{NR}},$$

soit :

$$\boxed{q_0 = \frac{1}{2} \Omega_0^{\text{NR}} - \Omega_{\Lambda 0}}. \quad (1.31)$$

Cette expression montre que la matière tend à freiner l'expansion alors qu'une constante cosmologique positive tend à l'accélérer.

Un des buts de la cosmologie est de mesurer les paramètres cosmologiques que nous venons de présenter ; voici un bref état des lieux :

- **la constante de Hubble H_0 .**

Sa mesure est très difficile à cause de nombreux biais systématiques. L'intervalle de valeur communément admis pour H_0 est $[65 - 75] \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$ (voir Madore et al. (1999) par exemple).

– **la densité de matière Ω_m .**

En observant la dynamique des galaxies et des amas de galaxies, on peut donner des contraintes sur la quantité de matière nécessaire pour reproduire une telle dynamique. Les estimations actuelles donnent une valeur de Ω_m de l'ordre de 0.3, et ceci en utilisant des méthodes indépendantes; voir Carlberg et al. (1996) pour la méthode basée sur la dispersion de vitesse dans les amas et Ma et al. (1998) pour celle sur le superamas Corona Borealis, par exemple.

– **la constante cosmologique Ω_Λ .**

Récemment, Riess et al. (1998) ont montré que $\Omega_\Lambda > 0$ à 99% de niveau de confiance, en supposant que $\Omega_m > 0.2$. De même, Perlmutter et al. (1999) ont trouvé que $\Omega_\Lambda = 0$ était exclu à 99% (leur meilleur fit est pour $\Omega_m = 0.3$ et $\Omega_\Lambda = 0.7$ en supposant un univers critique et $\Omega_m = 0.73$ et $\Omega_\Lambda = 1.32$ sinon, voir Fig. 1.4). Leur étude est basée sur 42 supernovæ de type Ia de grand redshift et suppose que ces supernovæ n'évoluent pas (c'est-à-dire qu'une supernova proche à petit z a les mêmes caractéristiques qu'une autre à grand z). Notons que Riess et al. (1999) ont trouvé un effet d'évolution des supernovæ qui pourrait modifier ces résultats. D'autre part, la présence de poussières dans le milieu intergalactique pourrait en partie expliquer les résultats des supernovæ sans faire intervenir de constante cosmologique, mais cela reste encore très incertain (Aguirre, 1999).

– **le paramètre de décélération q_0 .**

Perlmutter et al. (1999) trouvant une constante cosmologique positive, leur q_0 est négatif (puisque l'univers est dans ce cas en accélération) et égal à $q_0 = \Omega_m/2 - \Omega_\Lambda$ soit ici $q_0 = -0.55$. Là encore, en supposant qu'il n'y a pas d'évolution des supernovæ (c'est-à-dire qu'elles sont standard à tous les redshifts) et qu'il n'y a pas d'effet systématique comme la poussière.

1.3.5 Distances et temps écoulé

Nous avons rencontré jusque là la distance propre, qui n'est pas une observable physique. Les seules observables sont les distances angulaire et de luminosité. Celles-ci dépendent des paramètres cosmologiques et nous allons voir que leur étude permet de contraindre ces derniers. Pour cela, nous allons établir les expressions de ces distances à partir de la fonction $E(z)$ de l'Eq. 1.29 :

$$E(z) = (\Omega_0^R(1+z)^4 + \Omega_0^{NR}(1+z)^3 - \Omega_{0\kappa}(1+z)^2 + \Omega_{0\Lambda})^{1/2}.$$

En partant de l'équation de propagation des photons ($ds = 0$), on arrive, après quelques calculs, à l'équation suivante :

$$\int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - \kappa r'^2}} = \frac{c}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}.$$

Le membre de gauche de cette équation est intégrable analytiquement, ce qui nous permet d'en déduire l'expression donnant r :

$$r = S \left(\frac{c}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right), \quad (1.32)$$

où la fonction S est l'identité si $\kappa = 0$, sinus si $\kappa = 1$ et sinus hyperbolique si $\kappa = -1$. Cette équation est *exacte* et *complètement générale*, aucune approximation ni aucune supposition sur les paramètres cosmologiques n'ont été faites.

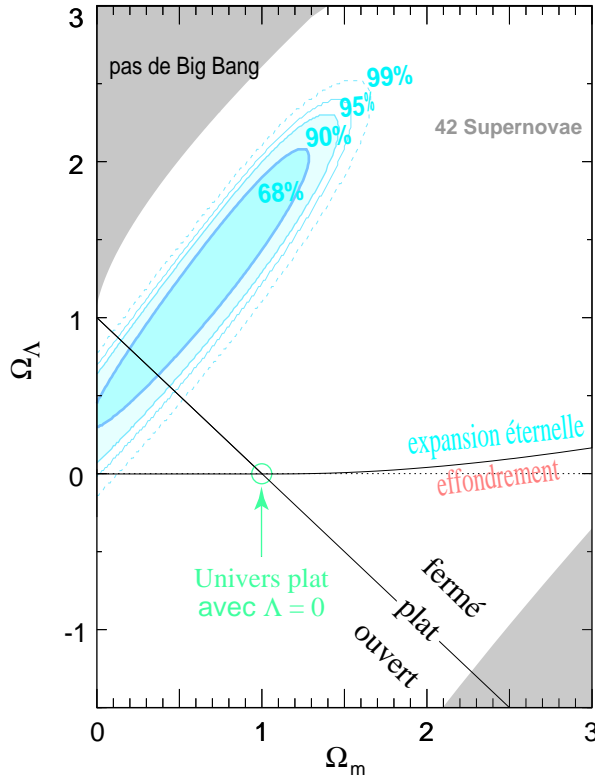


Fig. 1.4: Isocontours obtenus à partir de 42 supernovæ de grand z . Les modèles avec $\Omega_\Lambda = 0$ sont rejetés avec un niveau de confiance de 99%. Le cas d'un univers plat mène à $\Omega_m = 0.3$ et $\Omega_\Lambda = 0.7$. La figure est adaptée de Perlmutter et al. (1999).

Pour des redshifts proches de 0 caractérisant des objets proches de nous, l'intégrale sur z s'écrit, à l'ordre 2 :

$$\int_0^z \frac{dz'}{E(z')} = z - \frac{4\Omega_0^R + 3\Omega_0^{NR} - 2\Omega_{0\kappa}}{4} z^2 + o(z^2). \quad (1.33)$$

Distance angulaire

La distance angulaire peut servir à discriminer entre plusieurs modèles cosmologiques (voir Fig. 1.5). Sa définition, comme celle de la distance de luminosité, est issue de ce que l'on observerait dans un univers euclidien. On attribue à un objet de dimension physique $d\ell$ vu sous un angle $d\theta$ une distance dite "distance angulaire" telle que :

$$D_{\text{ang}} = \frac{d\ell}{d\theta}.$$

On peut aussi la comprendre comme étant la distance apparente de deux objets se trouvant au même redshift. La taille physique propre de l'objet observé se calcule en considérant les coordonnées d'espace-temps des extrémités de l'objet et celles de l'observateur présentées dans la Fig. 1.6 ; on trouve $d\ell = a(t)r d\theta$. On obtient donc :

$$D_{\text{ang}} = a(t) r = \frac{a_0 r}{1+z}, \quad (1.34)$$

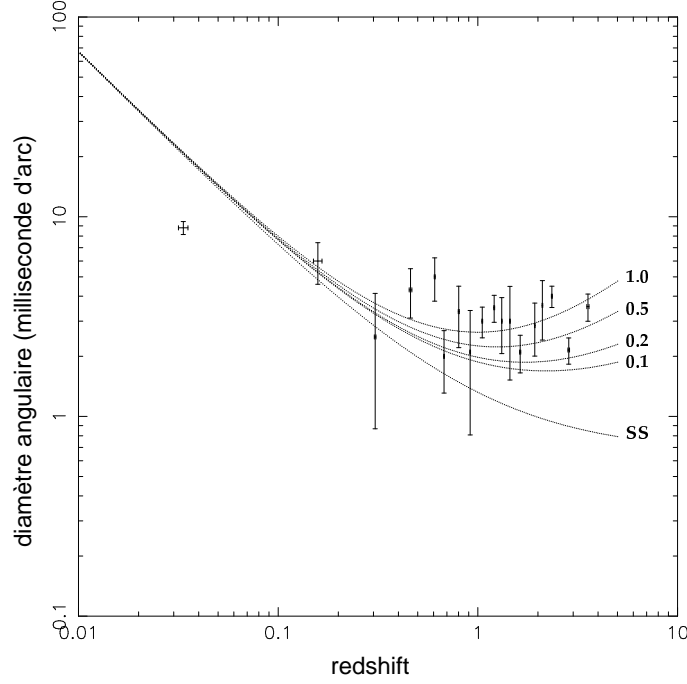


Fig. 1.5: Diagramme diamètre angulaire/redshift. Élaboré à partir de radio-sources compactes regroupées (de 18 à 19 sources par point sur le graphe) pour des redshifts allant de 0.011 à 4.72. Différents modèles théoriques sont tracés, avec des paramètres q_0 différents (voir page 20). Le modèle de l'état stationnaire (courbe indiquée par SS, pour "Steady State") est nettement rejeté. La figure est adaptée de Gurvits et al.(1998).

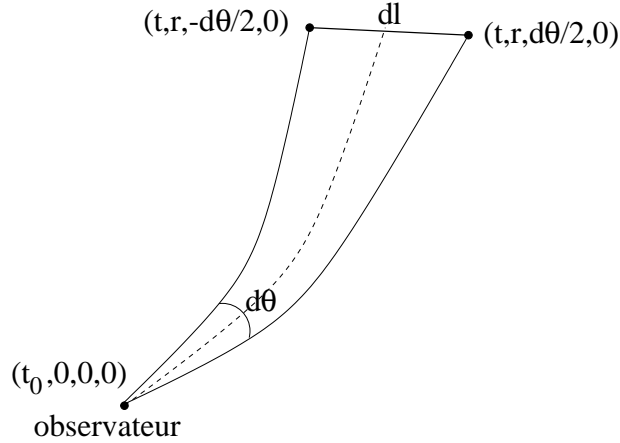


Fig. 1.6: Calcul de la distance angulaire. Dans un univers euclidien, cette distance est tout simplement $d\ell/d\theta$. Nous prolongeons cette définition dans un univers courbe. Les coordonnées indiquées sont celles des variables (t, r, θ, ϕ) de la métrique.

r pouvant être calculé à partir de l'Eq. 1.32. Pour des objets proches, $z \ll 1$, et on trouve que quelque soit la valeur de κ (car $\sin x \stackrel{0}{\sim} x$ et $\sinh x \stackrel{0}{\sim} x$)⁷ :

$$D_{\text{ang}} = \frac{cz}{H_0} + o(z) \quad (\text{on retrouve ici la loi de Hubble, avec } v \sim cz).$$

⁷ Ces relations valables pour des distances proches montrent que l'on ne peut tester la courbure de l'univers que sur de grandes distances.

Le diamètre angulaire quant à lui devient, pour $z \ll 1$:

$$d\theta = \frac{d\ell}{D_{\text{ang}}} \propto \frac{1}{z},$$

comportement que l'on observe dans la Fig. 1.5 : moins un objet de taille fixée est proche de nous, plus son diamètre angulaire diminue ; c'est un résultat auquel nous sommes habitués. Par contre, pour de grandes valeurs de z , l'intégrale sur $E(z)$ de l'Eq. 1.32 converge vers une limite finie donc :

$$D_{\text{ang}} \propto \frac{1}{1+z} \quad \text{d'où} \quad d\theta \propto 1+z,$$

ce que l'on observe également dans la Fig. 1.5. Il est ici surprenant de prime abord que des objets de plus en plus lointains nous apparaissent avec des diamètres angulaires de plus en plus grands. Ce comportement apparemment paradoxal s'explique de la façon suivante : un objet ayant un très grand redshift a émis la lumière que nous recevons il y a très longtemps, c'est-à-dire lorsque l'univers était beaucoup plus petit que maintenant ; l'observateur que nous sommes se trouvait donc à une distance beaucoup plus petite de la source, de sorte qu'elle nous apparaît avec un grand diamètre angulaire.

Distance de luminosité

Considérons un objet de luminosité absolue L_e (en W.s^{-1}) éclairant un récepteur situé à la coordonnée comobile r par rapport à lui et à $t = t_0$. La source envoie de la lumière avec le flux :

$$\phi_e = L_e \frac{d\Omega_e}{4\pi}$$

où $d\Omega_e$ est l'angle solide sous lequel la source voit le récepteur. La surface réceptrice est donc telle que :

$$dS = r^2 a_0^2 d\Omega_e. \quad (1.35)$$

La lumière émise a été dégradée car les photons ont été redshiftés par l'expansion de l'univers et sont reçus avec une période plus longue :

$$\frac{dE_0}{dt_0} = \frac{dE_0}{dE_e} \frac{dE_e}{dt_e} \frac{dt_e}{dt_0} = \frac{dE_e}{dt_e} \frac{1}{(1+z)^2},$$

où l'on a utilisé l'Eq. 1.23. On en déduit la relation entre les luminosités :

$$L_0 = \frac{L_e}{(1+z)^2}.$$

Le flux observé est donné quant à lui par :

$$\begin{aligned} \phi_0 &= L_0 \frac{d\Omega_e}{4\pi} = \frac{\phi_e}{(1+z)^2} \\ &= \frac{L_e}{(1+z)^2} \frac{d\Omega_e}{4\pi} \equiv L_e \frac{dS}{4\pi D_L^2}. \end{aligned}$$

Cette dernière relation *définit* la distance de luminosité. Étant donnée la relation 1.35, on peut l'écrire de la façon suivante :

$$\boxed{D_L = (1+z) a_0 r = (1+z)^2 D_{\text{ang}}}. \quad (1.36)$$

Les distances propre, angulaire et de luminosité représentent donc la même grandeur physique pour $z = 0$.

Temps écoulé

Nous voulons mesurer le temps écoulé $t_0 - t(z)$ correspondant à un objet se trouvant à un redshift z . Pour cela, nous partons de l'équation de Friedmann en fonction de $E(z) : \dot{a}/a = H_0 E(z)$. En séparant les variables, on obtient :

$$t_0 - t(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')E(z')}. \quad (1.36)$$

Le développement de cette expression pour $z \ll 1$ donne :

$$t_0 - t(z) = \frac{1}{H_0} \left(z - \frac{4\Omega_0^R + 3\Omega_0^{\text{NR}} - 2\Omega_{0\kappa} + 2}{4} z^2 + o(z^2) \right).$$

L'expression analogue obtenue à partir du développement mathématique formel du facteur d'échelle (Eq. 1.30) s'écrit :

$$t_0 - t(z) = \frac{1}{H_0} \left(z - \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) z^2 + o(z^2) \right).$$

En identifiant ces deux dernières expressions, on obtient :

$$1 + \frac{q_0}{2} = \Omega_0^R + \frac{3}{4}\Omega_0^{\text{NR}} - \frac{1}{2}\Omega_{0\kappa} + \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad q_0 = \Omega_0^R + \frac{1}{2}\Omega_0^{\text{NR}} - \Omega_{0\Lambda},$$

résultat identique à ce que nous avons trouvé page 20 où l'on avait négligé Ω_0^R .

On peut calculer par exemple à quel moment t_{eq} a eu lieu l'égalité matière-rayonnement. Il suffit pour cela d'écrire l'Eq. 1.36 en prenant comme limites t_{eq} et z_{eq} :

$$t_{\text{eq}}(z = z_{\text{eq}}) - 0(z = +\infty) = \frac{1}{H_0} \int_{z_{\text{eq}}}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z)E(z)}.$$

Il est légitime dans cette intégrale de remplacer $E(z)$ par :

$$E(z) = \left(\Omega_0^{\text{NR}} \frac{(1+z_{\text{eq}})^3}{(1+z_{\text{eq}})^4} (1+z)^4 \right)^{1/2}$$

puisque l'univers est dominé par le rayonnement entre $z = +\infty$ et $z = z_{\text{eq}}$ et que pour $z = z_{\text{eq}}$, on a $\Omega_0^{\text{NR}}(1+z_{\text{eq}})^4 = \Omega_0^{\text{NR}}(1+z_{\text{eq}})^3$. Le calcul se fait ensuite facilement et on trouve :

$$t_{\text{eq}} = \frac{1}{2H_0} \Omega_0^{\text{NR}-1/2} (1+z_{\text{eq}})^{-3/2} \sim 10^3 (\Omega_0^{\text{NR}} h^2)^{-2} \text{ ans} \sim 10^{10} (\Omega_0^{\text{NR}} h^2)^{-2} \text{ s}. \quad (1.37)$$

1.3.6 Horizons et rayon de Hubble

Dans la littérature, on rencontre souvent les termes d'horizon des "particules" et d'horizon des "événements". Cette distinction est superflue puisqu'il s'agit exactement de la même chose mais regardée soit vers le passé ou vers le futur, respectivement.

Horizon des particules

La vitesse de la lumière est finie, sa valeur est fixée par convention⁸. Une particule se déplaçant à cette vitesse en un *temps fini* va donc parcourir une *distance finie*. Notre vision de l'univers est donc limitée (dans les modèles d'univers que nous avons vus précédemment) : nous ne pouvons pas voir des régions se trouvant à une distance supérieure au produit de la vitesse de la lumière par l'âge de l'univers. Il est assez naturel d'employer le mot *horizon* pour qualifier la limite au-delà de laquelle nous ne pouvons plus rien voir. Formellement, un observateur situé en $r = 0$ à $t = t_0$ ne pourra recevoir de signaux que de points situés à une distance comobile r telle que $r < r_1$, où r_1 est la coordonnée comobile pour laquelle le signal émis à $t = t_1$ atteint l'observateur à $t = t_0$ (voir Weinberg (1972)). On détermine r_1 à partir de la formule 1.22 :

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

Si l'intégrale sur le temps diverge dans la limite $t_1 \rightarrow 0$ (cette limite correspond à la limite $a(t) \rightarrow 0$, c'est au moment du *Big-Bang*), alors l'observateur a déjà reçu des signaux de n'importe quel point dans l'univers (c'est le cas de l'univers de de Sitter où le facteur d'échelle a une croissance exponentielle). Par contre, si cette intégrale est convergente quand $t_1 \rightarrow 0$ — cela se produit pour $a(t) \propto t^{1/2(\text{radiatif})}$ ou $2/3(\text{matériel})$, voir section 1.3.2 — alors l'observateur ne pourra recevoir de signal que de points se trouvant à l'intérieur d'une sphère de rayon comobile $r_{\text{Hor}}(t)$ défini par (voir la Fig. 1.7) :

$$\int_0^{r_{\text{Hor}}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} = \int_{t_1 \rightarrow 0}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.38)$$

La distance propre de cet horizon est donc :

$$d_{\text{Hor}}(t) = a(t) r_{\text{Hor}}(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}.$$

L'horizon des particules est donc directement lié à notre cône de lumière passé.

Horizon des événements

Nous venons de voir qu'il pouvait exister des particules que nous ne pouvons voir. Dans certains modèles cosmologiques, il existe même des événements que nous ne pouvons pas voir. Un événement se produisant à $r = r_1$ et à $t = t_1$ deviendra visible pour l'observateur à $r = 0$ à l'instant t donné par :

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} = \int_{t_1}^t \frac{dt'}{a(t')}.$$

Si l'intégrale en t' diverge pour $t \rightarrow t_{\text{max}}$ (t_{max} est $+\infty$ si l'univers est ouvert ou plat ou une valeur finie définie comme l'instant du prochain effondrement quand $a(t) \rightarrow 0$ dans le cas d'un univers fermé) alors il sera possible de recevoir des signaux de tous les

⁸ $c = 299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$

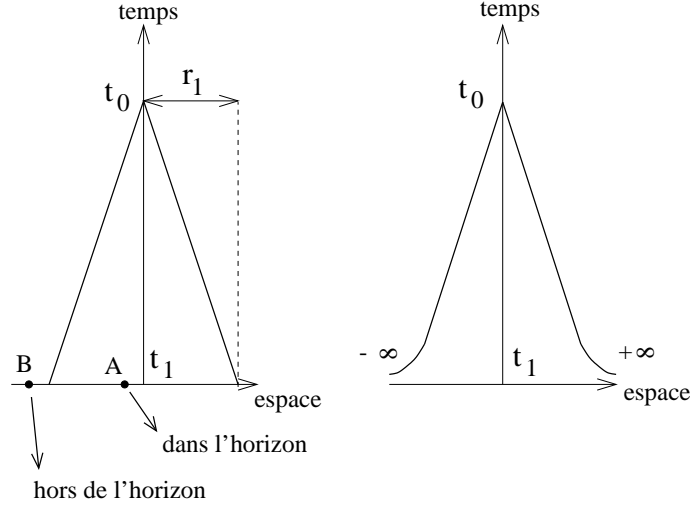


Fig. 1.7: Horizon des particules. Ces deux diagrammes d'espace-temps montrent comment évolue l'horizon des particules pour un observateur situé en $r = 0$ au temps t_0 . Les dessins sont faits dans le cas d'un univers plat ($\kappa = 0$) mais cette restriction ne change rien aux conclusions. Si l'intégrale 1.38 converge lorsque t_1 tend vers 0 (figure de gauche) alors l'horizon est fini car l'intersection du cône de lumière passé de l'observateur coupe l'hyperplan d'espace en $t = 0$ en des points situés à une distance finie de l'origine (le point A fait partie de cet horizon par exemple). Tout point situé hors de cet horizon (comme le point B) n'a pas encore communiqué avec l'observateur, il est donc pour le moment hors de son horizon. Par contre, si l'intégrale diverge (figure de droite), l'intersection du cône de lumière avec l'hyperplan d'espace en $t = 0$ se fait à l'infini : tous les points ont envoyé de l'information à l'observateur au temps t_0 .

événements de l'univers pourvu d'attendre suffisamment longtemps. Par contre, si cette intégrale converge, on ne recevra de signaux que d'événements tels que :

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} \leq \int_{t_1}^{t_{\max}} \frac{dt'}{a(t')}.$$

Ces événements, visibles tôt ou tard, constituent l'horizon des événements. Une symétrie par rapport à l'axe d'espace passant par l'observateur en t_0 de la Fig. 1.7 donne la figure associée à l'horizon des événements. On rencontre aussi cet horizon dans les trous noirs.

Rayon de Hubble

La loi de Hubble 1.20 montre que plus un objet comobile est lointain, plus il s'éloigne vite, par rapport à un observateur comobile donné. La sphère de Hubble est la distance atteinte par un objet comobile se déplaçant à la vitesse de la lumière. En appliquant la relation de Hubble : $v = H(t) d_{\text{propre}}(t)$ avec $v = c$, on obtient :

$$d_{\text{Hubble}}(t) = \frac{c}{H(t)} = c \frac{a}{\dot{a}}.$$

Cette distance est aussi la distance propre parcourue par la lumière pendant le temps de Hubble (c'est le temps caractéristique d'expansion) défini par :

$$\tau_H = \frac{1}{H}. \quad (1.39)$$

La sphère de Hubble et l'horizon des particules sont deux quantités distinctes. La sphère de Hubble définie à l'instant t ne dépend que du moment t alors que l'horizon des particules dépend de l'histoire passée de l'observateur *jusqu'à* l'instant t . Ainsi, un objet peut se trouver hors de la sphère de Hubble d'un observateur mais à l'intérieur de son horizon des particules. De plus, une fois dans l'horizon des particules d'un observateur, un objet ne peut plus en sortir, contrairement à la sphère de Hubble : un objet peut être à l'intérieur à un certain instant, en sortir plus tard et y entrer à nouveau encore plus tard (c'est ce qui se produit lors de l'inflation). La sphère de Hubble est parfois appelée *horizon cosmologique effectif* car c'est la grandeur pertinente dans les processus physiques pouvant se produire à une échelle donnée ; si une structure a une dimension caractéristique supérieure au rayon de Hubble, seuls les effets d'expansion de l'univers feront évoluer la structure à travers la métrique. Si sa taille est inférieure, ce sont les processus causaux de la physique qui la feront évoluer. Nous aurons l'occasion de revenir sur ces discussions plus tard, quand nous mettrons des perturbations dans l'univers pour créer des galaxies (voir page 57).

Dans ces premières pages, nous avons supposé que la gravitation était la force dominante à grande échelle, régissant l'évolution de l'univers. Nous avons choisi — et c'est le seul choix pertinent à ce jour — la relativité générale pour la décrire. En adhérant au principe cosmologique, nous avons obtenu la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker dans laquelle est apparu le facteur d'échelle a dépendant du temps. La résolution des équations d'Einstein (Eq. 1.10) nous a donné deux équations différentielles simples en a , ce sont les équations de Friedmann (Eqs. 1.15 et 1.16). Nous avons montré ensuite qu'il existait une solution correspondant à un facteur d'échelle a constant, c'est-à-dire donnant un univers statique — ceci grâce à la constante cosmologique — mais il s'avère que cette solution est instable. Le premier résultat fondamental est donc que l'univers évolue. Nous avons étudié ensuite quelques unes de ses propriétés : la loi de Hubble, le redshift et les différentes définitions de la distance. Nous avons introduit des quantités très commodess pour synthétiser le contenu de l'univers et trouvé une relation entre elles : ce sont les paramètres cosmologiques, dont la mesure constitue l'une des tâches principales de la cosmologie observationnelle. Il est donc maintenant acquis que l'univers est en expansion (on se sait par contre pas encore si sa croissance est accélérée ou ralentie). La section suivante décrit le modèle du *Big-Bang* ; nous allons étudier le comportement de particules dans un univers dynamique et définir la *température de l'univers*. Nous verrons qu'elle décroît avec le temps, donc que l'univers était plus chaud dans le passé.

1.4 Le modèle du Big-Bang

1.4.1 Propriétés et bref historique

Cinématique et expansion

Nous allons commencer par établir des résultats essentiels pour comprendre comment se fait l'évolution de photons ou de particules dans l'univers. La première étape est d'étudier la cinématique de particules *libres* (massives ou de masse nulle) ; la tri-impulsion \vec{p} d'une particule libre dans l'univers en expansion ne reste pas constante. Pour le montrer, nous allons tout d'abord reprendre l'équation de la géodésique, sous une forme un peu

différente de l'Eq. 1.4 :

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu u^\nu u^\alpha = 0.$$

On peut exprimer la quadri-vitesse d'une particule en fonction de sa tri-vitesse v_i et de son facteur de Lorentz $\gamma = 1/\sqrt{1-|\vec{v}|^2}$, avec $|\vec{v}|^2 = h_{ij}v^i v^j$, h_{ij} étant la partie espace-espace de la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (voir Kolb & Turner (1990)). On peut donc écrire u^μ sous la forme :

$$u^\mu = (u^0, u^i) = (\gamma, \gamma v^i).$$

L'équation de la géodésique écrite pour $\mu = 0$ est :

$$\frac{du^0}{ds} + \Gamma_{\nu\alpha}^0 u^\nu u^\alpha = 0.$$

Or dans notre métrique, $\Gamma_{\nu\alpha}^0 = \Gamma_{ij}^0 = (\dot{a}/a)h_{ij}$ (voir Eq. 1.5), les autres termes sont nuls. On a de plus $h_{ij}u^i u^j = |\vec{u}|^2$; on peut donc écrire :

$$\frac{du^0}{ds} + \frac{\dot{a}}{a}|\vec{u}|^2 = 0.$$

La relation $u^\mu u_\mu = 1$ nous donne $u^{02} - |\vec{u}|^2 = 1$ d'où :

$$\frac{1}{u^0} \frac{d|\vec{u}|}{ds} + \frac{\dot{a}}{a}|\vec{u}| = 0. \quad (1.40)$$

Enfin, comme $u^0 = dt/ds$, on a finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{|\vec{u}|}}{|\vec{u}|} &= -\frac{\dot{a}}{a} \\ \text{soit } |\vec{u}| &\propto \frac{1}{a} \text{ et } \boxed{|\vec{p}| \propto \frac{1}{a}}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

La norme du tri-moment d'une particule massive se propageant librement décroît en $1/a$. **Remarque :** le facteur ds s'élimine grâce au terme $1/u^0 = ds/dt$ dans l'Eq. 1.40 ; l'Eq. 1.41 reste donc valable pour les particules de masse nulle, caractérisées par $ds = 0$. Ainsi, pour les photons par exemple, on a :

$$E = h\nu = p^0 = |\vec{p}| \propto \frac{1}{a} \text{ ou encore } \lambda \propto a. \quad (1.42)$$

On voit donc que la fréquence du rayonnement électromagnétique dans un univers en expansion diminue proportionnellement au facteur d'échelle a , ou encore que son spectre est décalé vers les basses fréquences : c'est le décalage vers le rouge, le redshift, que nous avons déjà rencontré précédemment (voir Eq. 1.24 page 17). On voit mieux ici que le redshift cosmologique, celui qui est dû à l'expansion, n'est pas lié à un effet Doppler (voir Fig. 1.8).

Considérons maintenant une population de photons libres suivant une distribution de corps noir $n(\nu, T)$ et émettant dans un volume V . L'écriture de la conservation du nombre de photons nous donne :

$$V_0 n_0(\nu_0, T_0) d\nu_0 = V n(\nu, T) d\nu,$$

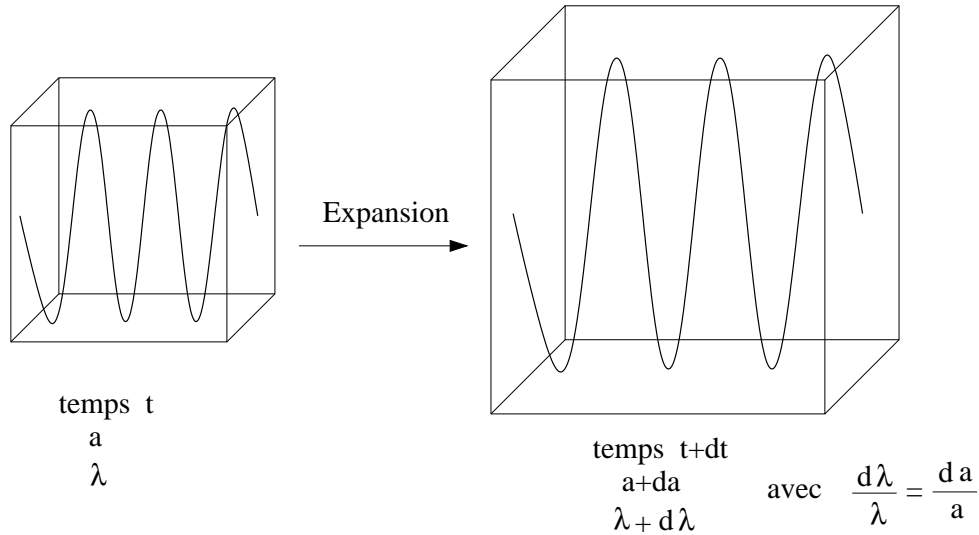


Fig. 1.8: Illustration du redshift cosmologique. Une boîte de volume V d'univers se dilate au cours de l'expansion d'un facteur $(1 + da/a)^3$. Une onde de longueur d'onde λ est elle aussi dilatée mais d'un facteur $1 + da/a$.

où les grandeurs indexées par "0" sont celles considérées dans le système de référence de l'observateur. À cause de l'expansion, le volume et la fréquence des photons sont modifiés :

$$V_0 = V (1 + z)^3 \quad \text{et} \quad d\nu_0 = \frac{d\nu}{1 + z},$$

et on obtient la relation suivante entre les fonctions de distribution :

$$n_0(\nu_0, T_0) = \frac{n(\nu, T)}{(1 + z)^2} \quad \text{avec} \quad n(\nu, T) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

soit

$$n_0(\nu_0, T_0) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3 (1 + z)^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \equiv \frac{8\pi \nu_0^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu_0(1+z)}{kT}} - 1} = \frac{8\pi \nu_0^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu_0}{kT_0}} - 1}.$$

Les photons gardent donc une distribution de corps noir mais leur température diminue :

$$\boxed{T_0 = \frac{T}{1 + z}}. \quad (1.43)$$

L'univers étant en expansion, le facteur d'échelle a augmente, la température d'un rayonnement de corps noir lié à l'expansion diminue.

En reprenant les résultats que nous avons démontré dans cette partie, la température ne cesse de décroître avec l'expansion de l'univers. En remontant le cours du temps, la température augmente : l'univers était plus chaud dans le passé. Le physicien et abbé Georges Lemaître s'inspira de ce résultat et construisit entre 1927 et 1933 la première théorie du *Big-Bang* : c'était son hypothèse de l'atome primitif. Il pensait que l'univers était issu d'un unique atome primordial qui pouvait se diviser pour engendrer toute la matière présente dans l'univers. Il écrivit en 1920 : "*L'évolution de l'univers ressemble à un feu d'artifice qui vient de s'éteindre. Il en reste quelques étincelles, des cendres et de la fumée, et debout sur ces cendres refroidies nous voyons les soleils qui s'éteignent lentement, et nous tentons de nous souvenir de la brillance évanouie de l'origine des mondes.*" Lemaître a eu du mal à défendre sa théorie, notamment à cause d'une remarque

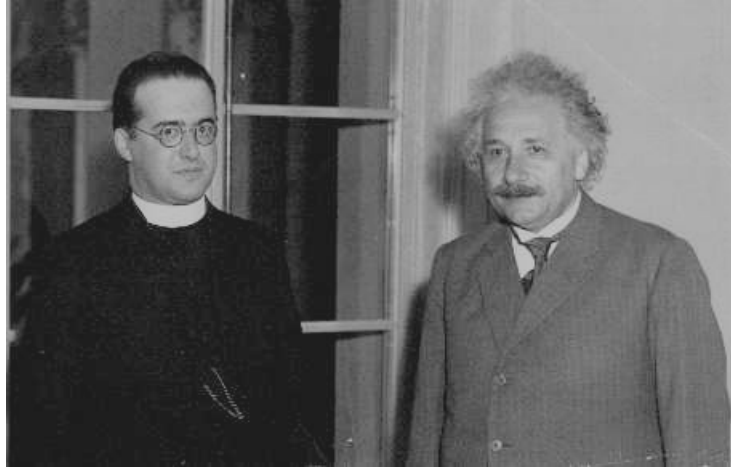


Fig. 1.9: Lemaître et Einstein vers les années 30.

qu'Einstein lui adressa lors du congrès Solvay de 1927 : “*Vos calculs sont justes mais votre intuition physique est abominable.*” Cependant, une question restée sans réponse jusque là (celle de l'origine des éléments chimiques : d'où venaient-ils ? Pourquoi y-a-t'il 90 % d'hydrogène, 9 % d'hélium et 1 % d'éléments plus lourds ?) allait bientôt être élucidée dans le cadre de la théorie de l'atome primordial. Le physicien allemand Carl Friedrich von Weizsäcker montra en 1938 que les étoiles n'étaient pas suffisamment chaudes pour fusionner les éléments légers en éléments lourds. Il suggérait qu'une boule de feu primordiale extrêmement chaude aurait pu synthétiser ces éléments chimiques (les légers comme les lourds) : c'est la *nucléosynthèse primordiale* (celle des années 30-40). Dans le développement de son idée, il apparut qu'elle avait beaucoup de points communs avec la théorie de Lemaître. Par la suite, dans les années 40-50, George Gamow reprit le flambeau ; il montra que tous les éléments de l'univers ont dû être formés dans les 20 minutes suivant le *Big-Bang* (Gamow, 1946; Alpher et al., 1948). Une des conclusions de ces travaux était que la grande majorité de la matière devait être de l'hydrogène, suivi par l'hélium, prédiction conforme aux observations. Une autre conclusion essentielle était la prédiction d'un fond de rayonnement de corps noir correspondant à une température de 5 K (Alpher & Herman (1948), suite à Gamow (1948)). C'est la première fois qu'une telle prédiction est faite. Avec les progrès de la physique nucléaire, on a bien mieux compris les processus en cours lors de la synthèse des éléments. Aujourd'hui, on pense que les éléments légers (H, He et Li) ont été produits pendant la nucléosynthèse primordiale et que les éléments lourds ont été synthétisés beaucoup plus tard dans les étoiles.

Notion de découplage

La notion de *découplage* est fondamentale pour bien comprendre les étapes importantes de l'évolution de l'univers. Considérons une population de particules. Celles-ci sont soumises à des interactions qui les thermalisent et qui les transmutent (par exemple $p + e^- \leftrightarrow n + \nu$). L'expansion de l'univers va diluer ces particules. L'échelle de temps associée à cette expansion est le temps de Hubble $\tau_H = H^{-1}$ (voir Eq. 1.39). L'équilibre chimique des particules peut être rompu si les réactions sont trop lentes ou les collisions trop rares (c'est-à-dire si les particules sont trop diluées par l'expansion). Formellement, on introduit le taux de réaction par :

$$\Gamma = \sigma n v, \quad (1.44)$$

où σ est la section efficace de la réaction, n la densité volumique des particules cible et v leur vitesse relative. Une particule ne reste en équilibre avec les autres que si le temps moyen entre deux collisions est inférieur au temps de Hubble à cet instant :

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} < \tau_H.$$

Si l'intervalle de temps séparant deux collisions est plus grand que le temps de Hubble, on dit que la particule (ou plutôt l'espèce associée) est gelée. Les particules de cette espèce sont alors découplées du reste de l'univers et sont libres. Cette manière de voir le découplage est assez simplifiée mais elle donne de bons résultats qualitatifs (pour des estimations quantitatives, il faudrait intégrer l'équation de Boltzmann dans le cadre de la relativité générale).

Entropie et expansion

Considérons différentes espèces de particules $A \in \{1, 2, 3, \dots, n_{\text{espèces}}\}$ de masses m_A présentes dans l'univers homogène et isotrope à l'instant t . On voudrait connaître les fonctions de distribution de ces espèces en équilibre cinétique, $f_A(|\vec{p}|, t)$, où \vec{p} est la tri-impulsion de la particule. Si les réactions entre ces particules se font avec un taux plus grand que celui d'expansion de l'univers (ce qui revient à dire que le libre parcours moyen des particules est plus petit que le rayon de Hubble), alors ces particules seront à l'équilibre thermodynamique. Il est donc possible de définir une température d'équilibre $T(t)$ que nous appelons "température de l'univers" ; ainsi, tant qu'il existe des particules à l'équilibre la température de l'univers est bien définie. Les interactions en jeu sont toutes à courte portée (effective pour l'électromagnétisme à cause du phénomène d'écrantage), leur rôle est de thermaliser les espèces et nous pouvons supposer qu'elles ne vont pas modifier la *forme* des fonctions de distribution, de Bose-Einstein (-1) ou de Fermi-Dirac (+1), selon le spin des particules :

$$f_A(|\vec{p}|, t) = \frac{g_A}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\frac{E - \mu_A}{T_A(t)}} \pm 1} \quad \text{avec} \quad E = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_A^2}, \quad (1.45)$$

où g_A est le facteur de spin de l'espèce A , μ_A son potentiel chimique. Si les espèces sont en plus en équilibre chimique, les potentiels chimiques ne sont pas indépendants. S'il arrive un moment où le taux d'interaction ne suffit plus à maintenir l'équilibre, il y a découplage de l'espèce A . Celle-ci quitte l'équilibre et va évoluer indépendamment du reste de l'univers. Pour ces particules désormais libres, nous avons montré comment évoluait la norme de leur tri-impulsion (voir Eq. 1.41) ; sachant que la forme de la fonction de distribution reste la même, les particules découplées sont décrites par :

$$f_{\text{dec}}(|\vec{p}|, t) = f_A \left(|\vec{p}| \frac{a(t)}{a(t_{\text{dec}})}, t_{\text{dec}} \right), \quad \text{pour } t > t_{\text{dec}}.$$

Progressivement, avec l'expansion, la température de l'univers diminue et de plus en plus d'espèces de particules quittent l'équilibre, jusqu'à ce qu'elles soient toutes découplées. Les dernières espèces de particules à l'équilibre étaient les photons, les baryons et les électrons (c'était quelques centaines de milliers après le *Big-Bang*). Lors de la recombinaison, lorsque les électrons se lient aux protons pour former des atomes neutres (voir section 2.2 page 47), l'équilibre est rompu et il n'y aura alors plus d'équilibre (du moins tant que l'univers est en

expansion). On définit alors la température de l'univers comme étant celle du rayonnement de corps noir des photons qui sont les dernières particules à s'être découplées.

Maintenant que nous connaissons la fonction de distribution des particules A , nous sommes en mesure de calculer leur densité volumique n , leur pression p et leur densité d'énergie ρ (voir Padmanabhan (1993)) :

$$\begin{aligned} n &= \int f(|\vec{p}|) d^3|\vec{p}| \\ p &= \int \frac{1}{3} \frac{|\vec{p}|^2}{E} f(|\vec{p}|) d^3|\vec{p}| \\ \rho &= \int E f(|\vec{p}|) d^3|\vec{p}|. \end{aligned}$$

À partir de ces équations et de l'expression de f , on montre que⁹ :

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\rho + p}{T} + nT \frac{d}{dT} \left(\frac{\mu}{T} \right), \quad (1.46)$$

ce qui nous permet, en utilisant la conservation de la partie espace-espace du tenseur énergie-impulsion (Eq. 1.18), d'obtenir :

$$d(sa^3) = d \left(\frac{\rho + p - n\mu}{T} \right) = - \left(\frac{\mu}{T} \right) d(na^3). \quad (1.47)$$

Où l'on introduit en la définissant la quantité sa^3 . Dans les cas qui nous concernent ici, la matière est non-dégénérée (le nombre d'états quantiques disponible est bien plus grand que le nombre de particules) c'est-à-dire $T \gg \mu$, soit $na^3 = N_{\text{particules}} \sim C^{\text{te}}$ et donc la quantité sa^3 est une constante au cours de l'expansion de l'univers. Dans l'hypothèse où $T \gg \mu$, l'Eq. 1.47 devient $s = (\rho + p)/T$. Le calcul de $Td(sa^3)$ se fait sans difficulté et on arrive à :

$$Td(sa^3) \sim d(\rho a^3) + p d(a^3),$$

c'est-à-dire que l'on peut identifier la quantité sa^3 avec l'*entropie*, en comparant avec le principe de thermodynamique $TdS = dU + p dV$. L'entropie S des particules A est constante au cours de l'expansion de l'univers. L'isentropie impliquant l'adiabaticité¹⁰, l'expansion de l'univers est adiabatique.

Il est intéressant de calculer n, p et ρ dans certains cas limites :

– **cas ultra-relativiste** : $T \gg m$

⁹ utiliser le fait que

$$\frac{df}{dT} = \left(\frac{1}{T} \frac{d\mu}{dT} + \frac{E - \mu}{T^2} \right) e^{\frac{E - \mu}{T}} f^2(|\vec{p}|) \quad \text{et que} \quad f^2 = - \frac{ET}{|\vec{p}|} \frac{df}{d|\vec{p}|} e^{-\frac{E - \mu}{T}}.$$

¹⁰ Ainsi que la réversibilité.

on suppose en plus que $T \gg \mu$; dans ce cas,

	n	ρ	$p = \rho/3$
bosons	$\frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_B T^3$	$\frac{\pi^2}{30} g_B T^4$	$\frac{\pi^2}{90} g_B T^4$
fermions	$\frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_F T^3$	$\frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g_F T^4$	$\frac{7}{8} \frac{\pi^2}{90} g_F T^4$

et donc

$$\rho_{\text{total}} = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4 \quad \text{avec} \quad g_*(T) = \sum_{i \in \text{bosons}} g_{Bi} \left(\frac{T_{Bi}}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i \in \text{fermions}} g_{Fi} \left(\frac{T_{Fi}}{T} \right)^4. \quad (1.48)$$

Le fait que des températures T_i apparaissent dans cette expression montre que nous prenons en compte *toutes* les espèces relativistes, mêmes celles qui ne sont plus à l'équilibre, c'est-à-dire qui sont découplées. Pour elles seulement, $T_i \neq T$. Si toutes les espèces sont à l'équilibre, alors $T_i = T$ et :

$$g_* = \sum_{i \in \text{bosons}} g_{Bi} + (7/8) \sum_{i \in \text{fermions}} g_{Fi}.$$

La pression des espèces relativistes est $p = \rho/3 \propto T^4$ donc $(\rho + p)/T \propto T^3$ d'où :

$$S = g_{*S}(T) a^3 T^3 = C^{\text{te}} \quad (1.49)$$

est conservée avec

$$g_{*S}(T) = \sum_{i \in \text{bosons}} g_{Bi} \left(\frac{T_{Bi}}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i \in \text{fermions}} g_{Fi} \left(\frac{T_{Fi}}{T} \right)^3.$$

Comme au cours de l'expansion de plus en plus d'espèces de particules quittent le régime relativiste, $g_*(T)$ et $g_{*S}(T)$ sont décroissantes quand T décroît, ou quand t croît.

– **cas non relativiste : $T \ll m$**

on trouve dans ce cas :

	n	ρ	$p \quad (p \ll \rho)$
bosons et fermions	$g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m-\mu}{T}}$	$n m$	$n T$

La densité d'énergie des espèces non relativistes décroît en $e^{-m/T}$ par rapport à celle des espèces relativistes. C'est pour cette raison que dans la période de domination de la radiation, on néglige la contribution des espèces non relativistes.

Nous sommes désormais en mesure de décrire le comportement d'une espèce de particules A , de masse m_A . Supposons-la dans un premier temps en équilibre thermodynamique

avec le reste de l'univers. Sa fonction de distribution est de Bose-Einstein ou de Fermi-Dirac et sa température — c'est aussi celle de l'univers par définition — est donnée par :

$$T \propto \frac{g_{*S}(a)^{-1/3}}{a} \quad \text{avec} \quad g_{*S}(a) = \sum_{i \in \text{bosons}} g_{Bi} \left(\frac{T_{Bi}}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i \in \text{fermions}} g_{Fi} \left(\frac{T_{Fi}}{T} \right)^3.$$

Supposons ensuite qu'à $t = t_{\text{dec}}$ (ou $T(t_{\text{dec}}) = T_{\text{dec}}$), l'espèce A se découple tandis qu'elle est ultra-relativiste, c'est-à-dire $T_{\text{dec}} \gg m_A$. Sa fonction de distribution restera *toujours* de Bose-Einstein ou de Fermi-Dirac pour des particules ultra-relativistes *même quand* T_A *deviendra inférieure* à m_A . La température $T_A(t)$ de cette espèce découplée, qui est à partir de maintenant différente de celle de l'univers, est donnée par :

$$T_A(t) = T_{\text{dec}} \frac{a(t_{\text{dec}})}{a(t)}, \quad \text{avec} \quad t > t_{\text{dec}},$$

qui décroît en a^{-1} exactement. Il arrivera un moment où $T_A < m_A$, l'espèce A n'est plus relativiste mais garde une distribution de particules ultra-relativistes. Par contre, sa densité d'énergie change et prend sa forme non relativiste, $\rho_A = n_A m_A$. Remarquons que la température de l'univers décroît moins vite que celle de l'espèce découplée pendant qu'elle était ultra-relativiste car :

$$\frac{T(t)}{T_A(t)} = \left(\frac{g_{*S}(a(t))}{g_{*S}(a(t_{\text{dec}}))} \right)^{-1/3} \quad \text{est plus grand que 1.}$$

Le cas que nous venons d'étudier s'applique par exemple aux neutrinos fossiles. Il est facile d'étendre le raisonnement que nous venons de faire à d'autres types de particules (massives ou de masse nulle) et se découplant à des moments différents. Nous résumons ces résultats dans le tableau suivant :

masse	découplage	T_{dec}	T_A	n_A ¹	ρ_A
0	non	—	$T_A = T$ $\propto g_{*S}(a)^{-1/3} a^{-1}$	BE ou FD avec $m = 0$	$\propto T^4$
0	oui	T_{dec}	$T_A \propto a^{-1}$	BE ou FD avec $m = 0$	$\propto T_A^4$
m_A	non	—	$T_A = T$ $\propto g_{*S}(a)^{-1/3} a^{-1}$	BE, FD ou MB selon T/m_A	$\propto T^4$ si $T \gg m_A$ $n_A m_A$ si $T \ll m_A$
m_A	oui	$T_{\text{dec}} \gg m_A$	$T_A \propto a^{-1}$	BE ou FD avec $m = 0$	$\propto T_A^4$ tant que $T_A > m_A$ puis $n_A m_A$
m_A	oui	$T_{\text{dec}} \ll m_A$	$T_A \propto a^{-2}$	MB	$n_A m_A$

1.4.2 Scénario

En utilisant le modèle standard de physique des particules et en allant vers le passé, on peut reconstituer l'histoire chimique de l'univers. On ne peut remonter qu'au temps

¹ BE : Bose-Einstein ; FD : Fermi-Dirac ; MB : Maxwell-Boltzmann.

de Planck, soit 10^{-43} s après le *Big-Bang*, époque à laquelle les conditions extrêmes de température et de densités contraignent la gravitation et la mécanique quantique à fusionner. À l'heure actuelle, aucune théorie n'y est parvenu avec succès. La Fig. 1.10 présente les étapes les plus remarquables de l'histoire de l'univers.

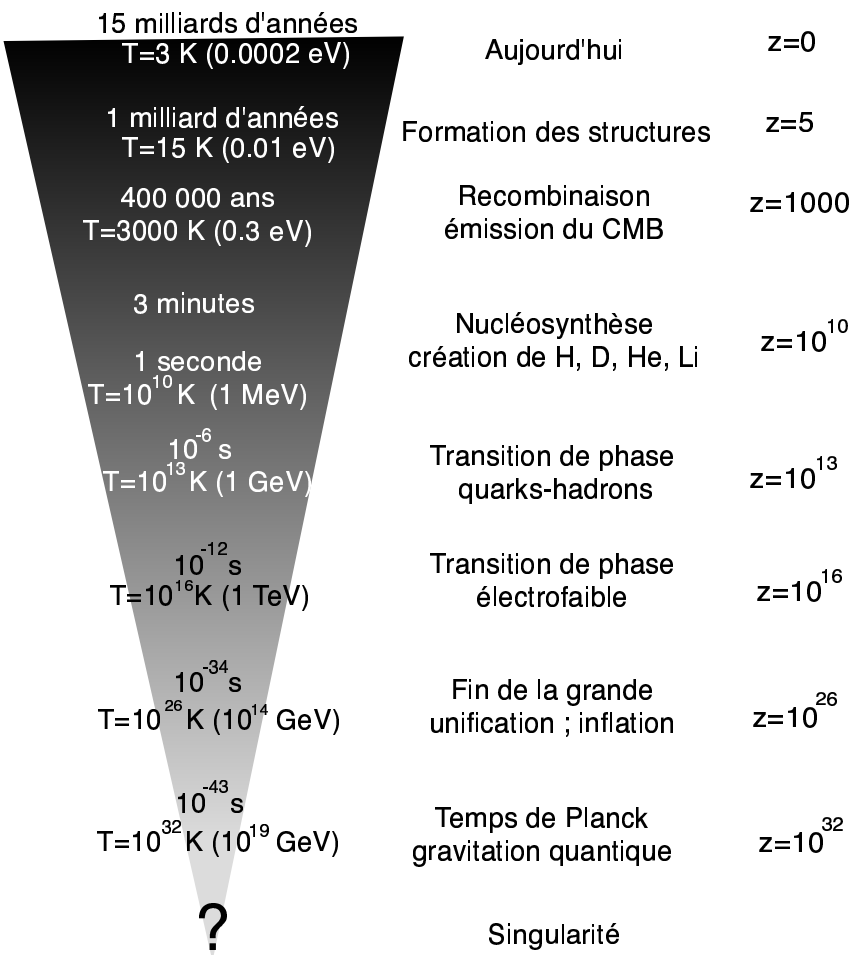


Fig. 1.10: Évolution de l'univers, du temps de Planck jusqu'à aujourd'hui. Résumé des étapes importantes dans l'histoire de l'univers. Les valeurs de z données ne sont que des ordres de grandeurs.

- $T \sim 3$ K. Commençons par l'époque actuelle. Nous observons des structures, telles que des galaxies, amas et superamas. L'univers n'est pas homogène à petite échelle. Notre univers est baigné par un rayonnement de corps noir homogène, isotrope, d'une température de 2.728 ± 0.004 K à 95 % de niveau de confiance, voir Fig. 1.11 et Fixsen et al. (1996). Des anisotropies ont été détectées au niveau de $\delta T/T \sim 10^{-5}$, germes des structures actuelles. Nous y reviendrons en détail dans la suite.
- $T \sim 15$ K. Les structures se forment. Le processus de formation n'est pas complètement compris mais on pense que les protogalaxies se sont formées en premier, puis, par accrétion, ont donné les amas et les superamas. C'est le scénario "bottom-up", qui nécessite la présence de matière noire froide, c'est-à-dire non relativiste au moment de son découplage.
- $T \sim 3000$ K. La température est suffisamment basse pour que les électrons puissent se lier aux noyaux : les premiers atomes se forment. Les photons, qui interagissaient principalement avec ces électrons par diffusion Thomson, vont pouvoir désormais se

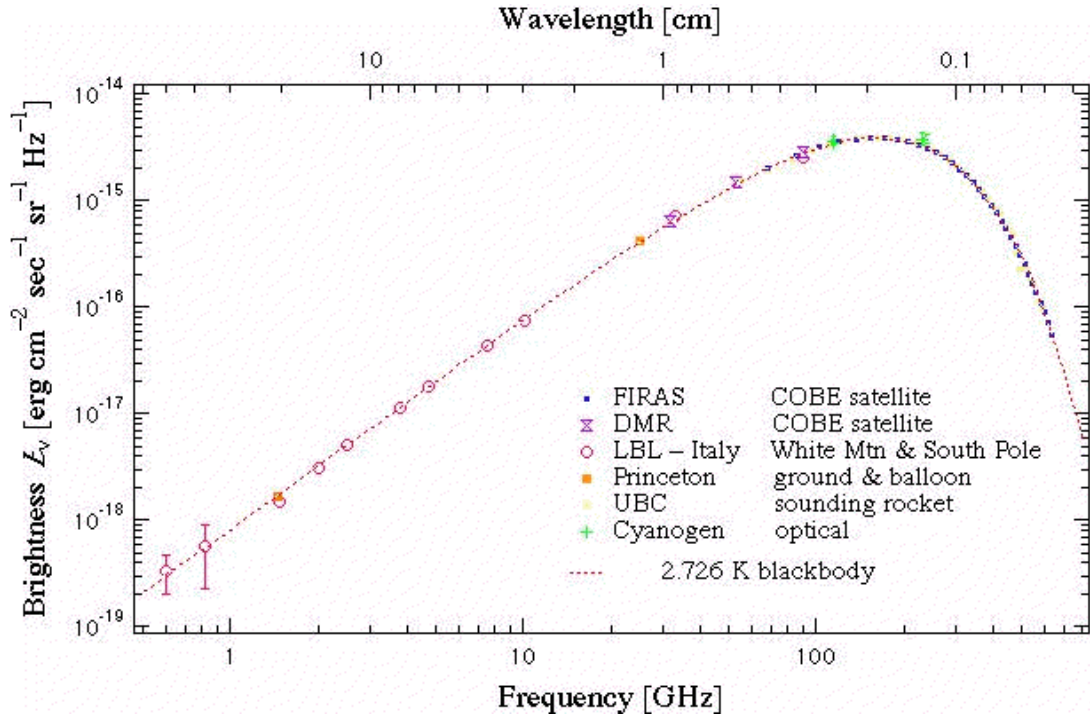


Fig. 1.11: Spectre du CMB obtenu avec l'instrument FIRAS du satellite COBE.

L'accord avec une distribution de Planck est excellent. Le meilleur fit donne $T = 2.728 \pm 0.004$ K à 95 % de niveau de confiance (Fixsen et al., 1996).

propager librement car leur libre parcours moyen devient très grand devant le rayon de Hubble. Les photons se découplent. L'univers, opaque jusqu'à maintenant, devient transparent aux photons. C'est ce rayonnement que nous observons aujourd'hui sous la forme du rayonnement de fond à 3K. Le fait que ce soit un corps noir signifie qu'il a eu le temps de se thermaliser avant que les photons ne se découplent. À ce moment, la température est de 0.3 eV. Curieusement, ce n'est pas à $E_I = 13.6$ eV (énergie d'ionisation de l'hydrogène) que le découplage a eu lieu. Ceci est dû à deux effets conjugués : premièrement, la courbe du corps noir de température donnée présente un maximum mais la courbe est relativement étalée autour (voir Fig. 1.11) ; deuxièmement, les photons sont très supérieurs en nombre aux baryons ($\sim 10^{10}$ fois plus nombreux). Même à des températures inférieures à 13.6 eV, il reste suffisamment de photons d'énergie supérieure pour ioniser toute la matière. Il faudra attendre que l'expansion l'ait refroidi jusqu'à environ 0.3 eV pour que les électrons puissent se lier aux baryons. L'univers est vieux de quelques centaines de milliers d'années.

- $T \sim 65\,000$ K. C'est l'égalité matière-rayonnement. Nous en avons déjà parlé page 25. Avant cette époque, l'univers est dominé par les particules relativistes ; l'univers est âgé d'environ 1000 ans. Le facteur d'échelle a passe du régime $a \propto t^{1/2}$ à $a \propto t^{2/3}$.
- $T \sim 10^{11} - 10^9$ K. Les premiers noyaux atomiques se forment dans l'intervalle approximatif 10^{-2} s \rightarrow 10^2 s. La nucléosynthèse est le test cosmologique le plus ancien que l'on puisse faire. Le paramètre fondamental du modèle de nucléosynthèse primordiale est le rapport η du nombre de baryons sur le nombre de photons ; c'est un paramètre fondamental car il est constant dans le temps. Il est de l'ordre de 10^{-10} et l'on utilise plutôt le paramètre $\eta_{10} = \eta/10^{-10}$. À cette température, les protons et neutrons ne sont plus à l'équilibre et commencent, par collision, à synthétiser du deutérium : $n + p \rightarrow D + \gamma$. Pour $T \sim 10^9$ K, le tritium, hélium 3 et 4 se forment et

enfin le lithium 6 et 7. Les abondances (fractions de masse pour $Y_P = \text{He}/\text{H}$ et numérique pour les autres rapports) prédites à l'issue de cette phase de nucléosynthèse sont (Sarkar, 1996; Hogan, 1997) :

$$\begin{aligned} Y_P &= 0.235 + 0.012 \ln \left(\frac{\eta_{10}}{2} \right) \left[\left(\frac{\eta_{10}}{2} \right)^{-0.2} \right. \\ &\quad \left. + 0.011 \left(1 - \left(\frac{\eta_{10}}{2} \right)^{-0.2} \right) \pm 0.0006 \right] \\ \left(\frac{\text{D}}{\text{H}} \right) &= 15.6 \times 10^{-5 \pm 0.03} \left(\frac{\eta_{10}}{2} \right)^{-1.6} \\ \left(\frac{{}^7\text{Li}}{\text{H}} \right) &= 1.06 \times 10^{-10} \pm 0.1 \left[\left(\frac{\eta_{10}}{2} \right)^{-2.38} + 0.28 \left(\frac{\eta_{10}}{2} \right)^{2.38} \right], \end{aligned}$$

avec $Y_P = m_{\text{He}}/m_{\text{tot}}$. Les erreurs apparaissant ici sont celles sur les taux de réaction. Ces prédictions sont montrées sur la Fig. 1.12 tirée de Olive (1999). Pour la densité de baryons :

$$\boxed{0.01 \leq \Omega_b h^2 \leq 0.025} \quad (\text{intervalle qui peut varier un peu selon les auteurs}) \quad (1.50)$$

soit, pour une valeur “raisonnable” de H_0 (prenons $70 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$),

$$\begin{aligned} 0.02 &\leq \Omega_b \leq 0.05 \quad \text{voir Olive et al. (1999),} \\ 0.033 &\leq \Omega_b \leq 0.043 \quad \text{voir Burles et al. (1999).} \end{aligned}$$

Précisons que la nucléosynthèse est un des plus grands succès de la théorie du *Big-Bang* puisqu'elle prédit et explique toutes les abondances des éléments légers, en accord avec les observations. Il existe une valeur de η_{10} qui rend théorie et observations compatibles; ce paramètre permet de mesurer $\Omega_b h^2$. Pendant cette époque, les neutrinos se découplent. Ils constituent un fond de rayonnement analogue à celui des photons mais leur température n'est que de 1.96 K.

- **T $\sim 10^{13}$ K.** Après avoir vu la synthèse des premiers atomes (recombinaison) puis la synthèse des premiers noyaux (nucléosynthèse), voici l'époque de la synthèse des nucléons. Nous sommes ici à la transition de phase quark-hadrons. La température, trop basse, ne permet pas aux quarks de rester libres. Ils préfèrent se confiner en hadrons car l'énergie d'une particule colorée isolée est infinie. Leur regroupement en hadrons (nucléons et autres particules sensibles à l'interaction forte) les rend stables. À température supérieure, l'état stable est un plasma de quark et de gluons, que l'on cherche activement à reproduire dans les accélérateurs.
- **T $\sim 10^{16}$ K.** À cette température ($\sim 300 \text{ GeV}$), se produit la transition de phase électrofaible. Cela signifie que les interactions faibles et électromagnétiques sont décrites par une seule et même force, c'est l'interaction électrofaible. Le mécanisme de Higgs brise la symétrie $SU(2) \otimes U(1)$ ce qui différencie par la suite les deux forces.
- **T $\sim 10^{26}$ K.** Au dessus de cette température, toutes les interactions sont unifiées. Toutes ? Non, seule la gravitation résiste encore. À plus basse température, le mécanisme de Higgs brise la symétrie et donne l'habituel $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ du modèle standard. Il est possible que l'asymétrie matière-antimatière apparaisse ici. Bien que les modèles de grande unification (GUT) diffèrent sur quelques points, ils sont tous des théories de jauge contenant un ou plusieurs champs scalaires ϕ (champ de Higgs). Le comportement de ce champ est gouverné par un potentiel V qui a un

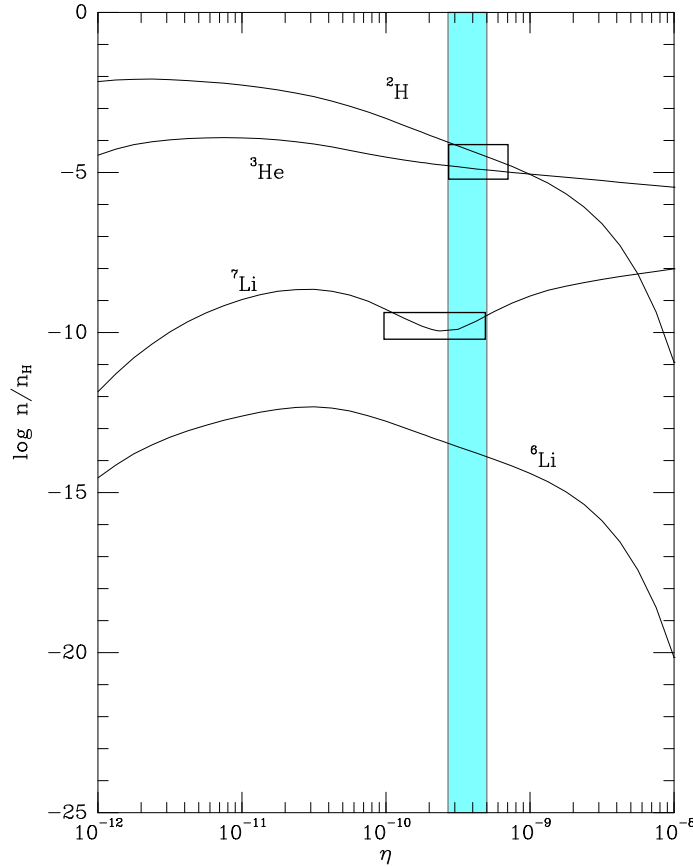


Fig. 1.12: Abondances théoriques des éléments légers en fonction de η . Les abondances prédites sont représentées par les courbes : les mesures sont les rectangles dessinés sur celles de ${}^7\text{Li}$, ${}^2\text{H}$ et ${}^3\text{He}$. Théorie et expérience sont compatibles pour $\eta \sim 3.5 \times 10^{-10}$ (domaine grisé).

minimum pour une valeur non nulle de ϕ et dont la forme dépend de la température. Celle-ci diminuant, le potentiel V présente des minimums secondaires pour une certaine valeur critique T_c . Il peut arriver que le champ reste dans un minimum secondaire, c'est un état métastable, analogue à la surfusion en physique macroscopique. La densité d'énergie est alors constante, analogue à une constante cosmologique. L'univers connaît alors une phase d'expansion exponentielle, c'est l'*inflation* (voir section 2.3 page 52). La température continuant de diminuer, le champ va revenir à un minimum absolu autour duquel il va osciller ; ces oscillations s'amortissent par création des particules usuelles et à cause de l'expansion (Lyth et Riotto, 1999; Kolb et Turner, 1990).

Dans ce premier chapitre, nous avons vu que l'histoire globale de l'univers était comprise d'une façon assez satisfaisante. Certains points particuliers de son évolution ont demandé une amélioration du modèle sans jamais le remettre en cause dans sa nature. Cependant, nous avons fait l'hypothèse que l'univers était rempli d'un fluide homogène et isotrope. Or un tel univers, complètement homogène ne peut pas produire les structures que nous observons aujourd'hui. Il nous faut revoir notre définition du principe cosmologique, en introduisant les notions d'homogénéité et d'isotropie *statistiques*.

2. FLUCTUATIONS DANS L'UNIVERS

2.1 Observations

2.1.1 Élargissement du principe cosmologique

Le principe cosmologique stipule que l'univers est parfaitement homogène et isotrope. Cette hypothèse, associée avec la relativité générale fournit la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Cependant, comme nous l'avons déjà vu page 7, les observations sont en contradiction avec ce principe : manifestement, l'univers n'est pas homogène car nous observons des structures comme par exemple des galaxies, des amas, des superamas... L'univers nous apparaît homogène sur des échelles supérieures au Gpc. Rappelons que l'observation d'un fond diffus cosmologique homogène — le CMB — est la plus importante confirmation du bien-fondé du principe cosmologique. Nous devons permettre des inhomogénéités dans l'univers (qui sont déjà présentes dans le CMB), perturbations par rapport à un ensemble statistiquement homogène. Ces inhomogénéités se traduiront notamment par des fluctuations de la métrique qui ne sera plus de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. On pense que les petites inhomogénéités se sont développées sous l'effet de la gravitation en structures de plus en plus importantes, jusqu'à former les structures observées.

2.1.2 Méthode statistique

L'étude du mécanisme responsable de la distribution des galaxies dans l'univers est un sujet de recherche très actif, notamment depuis que les ordinateurs permettent de simuler l'évolution d'un ensemble de points en interaction, comme des inhomogénéités localisées. Si ce mécanisme ne contredit pas le principe cosmologique, il doit avoir opéré de façon uniforme : on devrait avoir la même probabilité d'avoir une galaxie dans un volume donné indépendamment de l'endroit considéré. Les observations montrent que les galaxies ont une nette tendance à se regrouper en amas. Ces deux propriétés nécessaires pour rendre compte des observations se traduisent par une fonction mathématique qui doit vérifier :

$$\begin{aligned} 1) \quad & P = \bar{n} dV \\ \text{et } 2) \quad & P_{12}(dV_1, dV_2) = \bar{n}^2 (1 + \xi_{gg}(r)) dV_1 dV_2, \end{aligned}$$

où \bar{n} est la densité moyenne de galaxies par unité de volume, dV_1 et dV_2 des éléments de volumes infinitésimaux, $P_{12}(dV_1, dV_2)$ la probabilité de trouver une galaxie dans le volume dV_1 et une autre dans le volume dV_2 et $\xi_{gg}(r)$ est la fonction de corrélation à deux points, positive pour exprimer le fait que les galaxies préfèrent s'apparenter. Cette fonction ne dépend que du module r de la séparation entre les galaxies puisque nous voulons décrire un univers statistiquement isotrope.

On peut exprimer cette corrélation entre galaxies en terme de corrélation du contraste de densité. Le contraste de densité numérique local de galaxies, défini par :

$$\delta g = \frac{n(\vec{r}) - \bar{n}}{\bar{n}},$$

nous permet d'écrire sous une nouvelle forme la fonction de corrélation :

$$\langle \delta g(\vec{r}_1) \delta g(\vec{r}_2) \rangle = \xi_{gg}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|).$$

Il est naturel de penser que la répartition des galaxies est corrélée à celle de la masse. On introduit pour cela le contraste de densité de masse défini par :

$$\delta(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}, \quad (2.1)$$

et le champ aléatoire associé dont la corrélation est donnée par :

$$\langle \delta(\vec{r}_1) \delta(\vec{r}_2) \rangle = \xi(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|).$$

Dans les modèles les plus simples, les corrélations de masse et de galaxies sont égales. On peut permettre aux galaxies d'être plus ou moins corrélées avec la densité de masse. On introduit alors le facteur de biais b en posant :

$$\xi_{gg} = b^2 \xi.$$

Il est commode de travailler dans l'espace de Fourier. L'Eq. 2.1 s'écrit dans cet espace :

$$\delta(t, \vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \delta_{\vec{k}}(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

Les vecteurs \vec{k} ont pour norme le nombre d'onde comobile ($k = 2\pi/\lambda$). Les modes de Fourier $\delta_{\vec{k}}(t)$ sont des variables aléatoires de moyenne nulle et de variance :

$$\langle \delta_{\vec{k}_1} \delta_{\vec{k}_2} \rangle = (2\pi)^3 P(k) \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \quad \text{où l'on a posé :} \quad P(k) = \int d^3r \xi(r) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \quad (2.2)$$

La fonction $P(k)$ est le *spectre de puissance*, c'est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation à deux points. P ne dépend que du module de \vec{k} car ξ ne dépend que du module de \vec{r} , en vertu du principe cosmologique. Les mesures de ce spectre de puissance sont présentées dans la Fig. 2.1. La puissance du mode \vec{k} est donnée par $|\delta(t, \vec{k})|^2$. Les modes de Fourier se trouvant dans l'intervalle $[k; k + d^3k]$ contribuent à raison de :

$$d^3k |\delta_k|^2 \propto k^2 dk |\delta_k|^2 = d(\ln k) (k^3 |\delta_k|^2).$$

La connaissance des propriétés statistiques des fluctuations de densités sont cruciales pour contraindre les théories de formation des structures. Deux d'entre elles, l'inflation et les défauts topologiques, prédisent des distributions différentes (gaussiennes et non-gaussiennes respectivement) pour ces fluctuations. Les observations favorisent nettement l'inflation, donc des fluctuations ayant une distribution gaussienne. Sous cette hypothèse, $\delta_{\vec{k}}$ et $\delta(t, \vec{r})$ sont des variables aléatoires gaussiennes. Notons que la fonction ξ est liée à la distribution de masse sans tenir compte de sa nature : on inclut ici la contribution de la matière baryonique (noire et lumineuse) au même titre que celle de la matière noire non-baryonique.

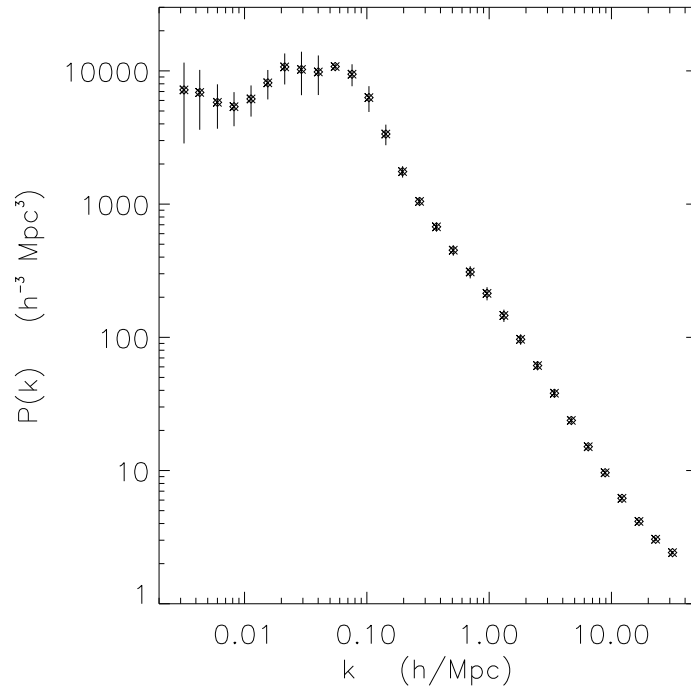


Fig. 2.1: **Spectre de puissance de la distribution des galaxies.** Les données sont issues de Gaztañaga & Baugh (1998).

2.1.3 La matière noire

Preuves de sa présence

D'un point de vue observationnel, le problème de la matière noire est intimement lié à la comparaison de la masse d'une structure avec la connaissance que nous avons de son contenu. Du voisinage du soleil, en passant par les halos des galaxies, par les amas jusqu'à l'univers dans son ensemble, il existe toujours trop peu de matière observable pour rendre compte des effets dynamiques observés, en supposant que la gravitation newtonnienne est correcte. Par exemple, lorsque l'on calcule la vitesse de rotation d'une étoile située en périphérie d'une galaxie, on trouve que cette vitesse décroît en raison inverse de la racine carrée de la distance au centre de la galaxie. Les observations (voir Fig. 2.2) sont en désaccord avec ces prédictions puisque les vitesses restent constantes. Zwicky (1933) est le premier à avoir subodoré l'existence de la matière noire; dans cet article la densité moyenne de masse dans l'amas Coma estimée est 400 fois plus grande que celle calculée en ne comptant que la masse lumineuse. Cette estimation suppose une valeur de H_0 de $558 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$, estimation de l'époque, bien supérieure aux valeurs typiques admises aujourd'hui. Avec une valeur beaucoup plus vraisemblable (environ $70 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$), on trouve un facteur 50 au lieu de 400, mais toujours bien plus grand que 1. Le rapport masse sur luminosité (M/L) est un bon indicateur de la présence de matière noire. Par convention, le rapport masse sur luminosité du soleil M_\odot/L_\odot vaut 1. Un rapport M/L plus grand que 1 correspond à une prédominance de matière noire sur la matière lumineuse. Ostriker et al. (1974) ont montré que le M/L des galaxies augmentait avec la distance au centre et que la masse manquante (c'est-à-dire la matière noire) pouvait jouer un rôle cosmologique. Oort (1940) a montré que le rapport M/L était de l'ordre de 250 dans les

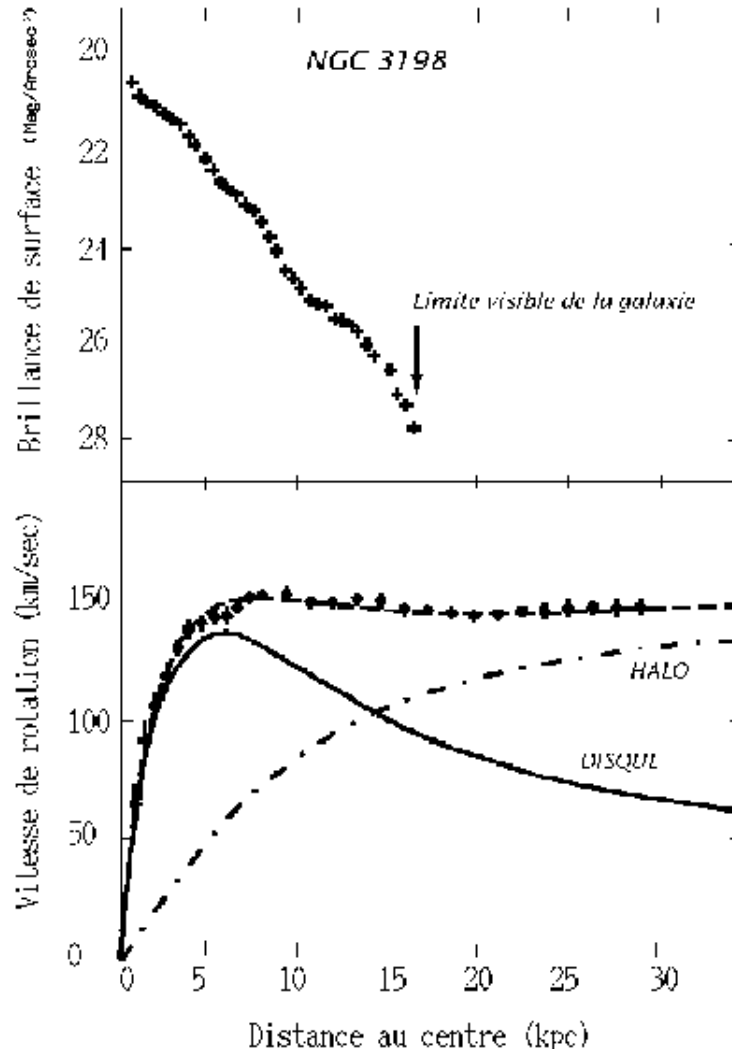


Fig. 2.2: Vitesse de rotation des étoiles autour du centre de NGC3198.

Graphe du haut : profil de luminosité de NGC3198. La répartition de matière lumineuse est directement liée à la distance au centre de la galaxie.

Graphe du bas : les points sont des mesures de vitesses de rotation d'étoiles autour du centre de la galaxie. Si l'on suppose que toute la matière de la galaxie est la matière lumineuse déterminée par le profil de luminosité et en appliquant les lois de la mécanique newtonnienne, alors les vitesses de rotation des étoiles devraient se trouver sur la courbe labellée par "DISQUE". On voit qu'au lieu de décroître, ces vitesses restent constantes. On arrive à reproduire les mesures en ajoutant à la galaxie un halo sphérique de matière noire (non-lumineuse). La masse de la galaxie augmente avec la distance au centre, contrairement à la masse lumineuse.

régions extérieures de NGC 3115. Comme dans le cas de Zwicky, ce nombre peut être divisé par 10 environ, compte-tenu de la précision médiocre des mesures de distance des galaxies à cette époque. Dans le proche voisinage du Soleil (quelques pc), on a $M/L \sim 1.7$. À l'échelle de la galaxie, il est déjà de l'ordre de quelques dizaines et de quelques centaines à l'échelle des amas de galaxies (voir Padmanabhan (1993)). Ma et al. (1998) ont trouvé un M/L de $560h$ pour le superamas Corona Borealis en étudiant la dynamique et les redshifts de 528 galaxies liées à ce superamas.

Nous voyons que le rapport masse sur luminosité est un nombre croissant avec le volume dans lequel on l'estime. Plus on considère de grands volumes, plus la matière noire est en excès par rapport à la matière lumineuse. La nucléosynthèse prédit que la contribution des baryons à la densité critique se trouve entre 2 % et 5 % ; les estimations sur la contribution des étoiles (matière lumineuse et baryonique) donnent une valeur de l'ordre de 0.5 %. La matière baryonique serait donc constituée d'environ 10 % de matière lumineuse sous forme d'étoiles et de 90 % de matière sombre. Nous avons vu d'autre part (voir page 21) que les estimations sur Ω_m (matière baryonique et non-baryonique) donnaient une contribution de l'ordre de 30 %. Il apparaît donc que la matière baryonique ne contribue que peu (quelques pourcents) à la densité de matière. Il existe donc de la matière noire non baryonique, largement dominante.

Une autre explication possible serait de modifier la théorie de la gravitation et de faire en sorte que la force décroisse moins vite que r^{-2} à grande distance (Begeman et al., 1991; Mannheim, 1993). Les observations sur l'effet de lentille gravitationnelle devraient mettre des contraintes très fortes sur de telles théories. Nous considérerons ici que la théorie de la gravitation est correcte. Une autre alternative pour expliquer le problème de la matière noire est la théorie de la nucléosynthèse inhomogène (Applegate et al., 1987) ; ce scénario est maintenant abandonné.

Nature de la matière noire

Matière noire baryonique. Comme nous ne la voyons pas sous forme lumineuse, il faut la chercher ailleurs que dans les étoiles. Une première piste est celle des corps massifs et compacts du halo galactique, dénommés MACHOs¹ en anglais. Cette catégorie inclut notamment les naines brunes, les jupiters, les naines blanches et les étoiles à neutrons. Les naines brunes sont des boules d'hydrogène et d'hélium trop légères ($M \leq 0.08 M_\odot$) pour que les réactions thermonucléaires se déclenchent. Les jupiters sont aussi des naines brunes mais leur masse est encore plus faible : $M \sim 0.001 M_\odot$. Les naines brunes étaient récemment encore les meilleurs candidats. La détection de ces objets se fait par effet de microlentille gravitationnelle (Paczynski, 1986; Griest, 1991). Les résultats, pas complètement stabilisés, montrent qu'au plus 50 % de la masse du halo serait sous la forme de MACHOs avec une masse de l'ordre de $0.5 M_\odot$ et que les objets de masse comprise entre $10^{-4} M_\odot$ et $0.003 M_\odot$ contribueraient au mieux à 20 % de la masse du halo. Les expériences à l'origine de ces résultats, MACHO et EROS (Alcock et al., 1997; Alcock et al., 1998; Afonso et al., 1999) ne convergent pas vers les mêmes conclusions mais sont en accord sur les limites supérieures.

Les nuages moléculaires froids et denses sont de bons candidats. Ils sont recherchés depuis longtemps mais ont été détectés pour la première fois par Valentijn & van der Werf (1999). Les mesures ont été prises par le satellite ISO et ont prouvé la présence de nuages

¹ "Massive Halo Compact Objects".

d'hydrogène moléculaire dans le disque de la galaxie NGC 891. Les auteurs en ont déduit que les nuages d'hydrogène moléculaire sont présents dans la totalité du disque et que la masse d'hydrogène moléculaire serait entre 5 et 15 fois plus grande que la masse d'hydrogène atomique. Ce surplus de masse, jusqu'alors inconnu, suffirait pour résoudre le problème de la matière noire, au moins dans la partie optique du disque. Il reste à confirmer ces résultats très encourageants.

Matière noire non baryonique. L'existence de ce type de matière noire ne fait pas de doute. Elle en est même la forme dominante (puisque Ω_m est proche de 0.3 et $0.02 \leq \Omega_b \leq 0.05$). Parmi les espèces non baryoniques, on distingue les espèces chaudes (HDM) des espèces froides (CDM). Un candidat constitue de la matière noire chaude (froide) s'il était relativiste (non relativiste) à l'époque de la formation des structures. Cette distinction est très importante pour ce qui est des scénarios de formation des structures dans l'univers ; en effet, la matière noire chaude efface toute trace de fluctuations à petite échelle et favorise ainsi la formation des grandes structures en premier qui, plus tard, peuvent se fragmenter en amas et en galaxies, c'est le scénario "top-down". Dans ce cas, on devrait observer une coupure (brusque baisse de puissance) dans le spectre de la Fig. 2.1 aux petites échelles spatiales (c'est-à-dire aux grandes valeurs de k) ce qui n'est pas le cas (White et al., 1983). Ce modèle de formation des structures par de la matière noire chaude est donc pratiquement abandonné.

Inversement, la matière noire froide, avec sa vitesse de dispersion faible, amplifie les fluctuations sur de petites échelles et favorise ainsi la formation des petites structures en premier (galaxies et amas) qui coalescent en grandes structures, c'est le scénario "bottom-up", qui ne génère pas de coupure dans le spectre de puissance et qui n'est pas contredit par les observations (voir Fig. 2.1). La distinction entre le cas de la matière noire chaude ou froide peut donc se faire en étudiant le spectre de puissance de la distribution spatiale des galaxies.

On peut cependant construire des modèles intéressants en ne mettant qu'une fraction de matière noire chaude (25 %) et le reste de matière noire froide. Dans ces modèles, un sérieux candidat pour la matière noire chaude est un neutrino léger², mais cette hypothèse semble de plus en plus fragile. Si un tel neutrino existait, sa densité d'énergie associée serait $\Omega_\nu h^2 = \sum m_i / (93.5 \text{ eV})$ pour avoir un rôle cosmologique important, où la somme porte sur les différentes espèces de neutrinos. Depuis les résultats de l'expérience Super-Kamiokande (Fukuda et al., 1998), on pense que les neutrinos pourraient avoir une masse non nulle. La différence de masse entre les neutrinos μ et τ est de :

$$5 \times 10^{-4} \text{ eV}^2 < \delta m^2 < 6 \times 10^{-3} \text{ eV}^2.$$

En supposant que $\nu_e \ll \nu_\mu \ll \nu_\tau$, alors $m_\tau^{\text{max}} \sim 7.7 \times 10^{-2} \text{ eV}$, beaucoup trop faible pour jouer un rôle dans la formation des structures.

Quant à la matière noire froide, on doit faire appel aux théories situées à des énergies au-delà de celles du modèle standard de la physique des particules. Ce dernier, basé sur la symétrie de jauge $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, ne propose aucun candidat à la matière noire. Les théories comme la symétrie PQ (Peccei-Quinn), la supersymétrie, les théories de grande unification (GUTs), les supercordes proposent des particules reliques des premiers instants de l'univers. Les axions (issus de la symétrie PQ) et des particules massives interagissant faiblement (WIMPs, pour Weakly Interacting Massive Particles, issus des

² $m \leq 100 \text{ eV}$

théories supersymétriques) sont les candidats les plus étudiés. La masse de l'axion doit se situer aux alentours de 10^{-5} eV. S'il existe, il devrait jouer un rôle important dans le bilan d'énergie de l'univers. Parmi les WIMPs, on peut citer le neutralino, particule supersymétrique la plus légère (la plus stable), de masse comprise entre 10 GeV et 3 TeV et sa section efficace avec la matière ordinaire est de l'ordre de celles des interactions faibles (voir Jungman et al. (1996) pour une revue très complète de la matière noire supersymétrique).

Enfin, il existe aussi une catégorie de matière noire tiède (WDM), représentée par des particules ayant une masse de l'ordre du keV, comme l'axino (Rajagopal et al., 1991), le neutrino droit et le gravitino.

Les modèles d'univers avec matière noire froide sont, de loin, les plus prometteurs. Lorsque nous invoquerons dans la suite de la matière noire, il s'agira toujours de matière noire froide.

Les inhomogénéités que nous observons aujourd'hui sous la forme de structures sont vraisemblablement présentes dans l'univers primordial. L'univers étant opaque avant la recombinaison, on ne peut espérer observer de structures au mieux jusqu'au rayonnement de fond cosmologique.

2.2 Le rayonnement de fond cosmologique

Nous voulons dans cette partie énoncer certaines propriétés fondamentales très générales concernant le rayonnement de fond cosmologique. Nous reviendrons sur les détails à partir de la page 77.

Le CMB a été émis suite à l'association des électrons aux noyaux pour la première fois depuis le début de l'univers, alors que la température permet à cette réaction de se produire. Cette période s'appelle la recombinaison. Auparavant, la température de l'univers était trop élevée par rapport à l'énergie de liaison de l'atome d'hydrogène et les atomes étaient immédiatement dissociés. Nous voulons savoir à quel moment de l'histoire de l'univers cette période se situe. Nous supposons pour cela que le milieu est à l'équilibre thermodynamique. Ce milieu est un plasma essentiellement constitué de protons, d'électrons et de photons. La réaction chimique caractérisant l'équilibre entre ces espèces s'écrit :



Les densités numériques de chacune des espèces i sont données par :

$$n_i = g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{\frac{\mu_i - m_i}{T}}.$$

La neutralité électrique du milieu nous assure que $n_{e^-} = n_p$ et la conservation du nombre baryonique nous indique que $n_B = n_p + n_H$. On néglige les atomes d'hélium (on a en fait environ 1 atome d'hélium pour 10 d'hydrogène). Le coefficient g_i est le poids statistique de l'espèce i : il vaut 2 pour les protons et les électrons et 4 pour l'atome d'hydrogène (car fait de 2 particules de spin 1/2). L'équilibre chimique se traduit par le bilan des potentiels chimiques :

$$\mu_p + \mu_{e^-} = \mu_H.$$

Les photons, particules de masse nulle et qui sont leur propre antiparticule, sont à l'équilibre donc leur potentiel chimique est nul ; c'est pourquoi il n'intervient pas dans cette équation. On a la relation suivante entre les masses :

$$E_I = m_{e^-} + m_p - m_H = 13.6 \text{ eV}$$

où E_I est l'énergie d'ionisation de l'atome hydrogène. En éliminant les potentiels chimiques (exprimer pour cela de deux manières différentes $e^{\frac{\mu_H - m_H}{T}}$, une fois à partir de n_H et une autre à partir du produit $n_{e^-} n_p$), on obtient :

$$n_H = \frac{g_H}{g_p g_{e^-}} n_p n_{e^-} \left(\frac{m_{e^-} T}{2\pi} \right)^{-3/2} e^{\frac{E_I}{T}},$$

où l'on a posé $m_H \sim m_p$ dans le facteur précédant l'exponentielle. Pour caractériser la proportion d'atomes H par rapport aux baryons, on introduit le paramètre d'ionisation x , défini par :

$$x = \frac{n_p}{n_B} = \frac{n_p}{n_p + n_H}, \quad \text{il vérifie} \quad \frac{1-x}{x} = \frac{n_H}{n_p} = x \eta n_\gamma \left(\frac{m_{e^-} T}{2\pi} \right)^{-3/2} e^{\frac{E_I}{T}}$$

où l'on a posé $n_B = \eta n_\gamma$, avec $\eta \sim 2.68 \times 10^{-8} \Omega_b h^2$ (voir Kolb & Turner (1990)). Tout l'intérêt de η est qu'il est *constant* puisque n_B et n_γ varient tous les deux en $1/a^3$. On peut donc le mesurer aujourd'hui. n_γ est la fonction de distribution du corps noir, égale à $2\zeta(3)T^3/\pi^2$; on obtient finalement :

$$\frac{1-x}{x^2} = \frac{4\sqrt{2}\zeta(3)}{\sqrt{\pi}} \eta \left(\frac{T}{m_{e^-}} \right)^{3/2} e^{\frac{E_I}{T}}. \quad (2.3)$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation de Saha, exprimée pour la variable d'ionisation x . Définir la température de recombinaison comme celle à laquelle 90 % des électrons se sont liés aux protons, revient à poser $x = 0.1$ et de résoudre pour T . La relation entre température et redshift est $T = (1+z) \times 2.728 \text{ K}$ (voir page 30) ; on trouve alors que la recombinaison s'est produite pour des redshifts compris entre 1200 et 1400 selon la valeur utilisée pour $\Omega_b h^2$ (de 0.01 à 1, voir fig 2.3) :

$$\boxed{1200 \leq z_{\text{rec}} \leq 1400}.$$

Pour un redshift intermédiaire de 1300, on trouve une température de :

$$T_{\text{rec}} \sim 0.3 \text{ eV} \quad \text{soit} \quad 3600 \text{ K}.$$

Pour calculer l'âge de l'univers correspondant, nous utilisons le fait que l'univers est dominé par la matière (puisque $z_{\text{rec}} \sim 1300$ et $z_{\text{eq}} \sim 2000$) et que le temps écoulé depuis que la matière domine est beaucoup plus grand que le temps écoulé depuis le *Big-Bang* jusqu'à l'égalité matière-rayonnement. On fait donc l'approximation que l'univers a toujours été dominé par la matière et donc que :

$$\begin{aligned} t_{\text{rec}} &= \frac{2}{3} H_0^{-1} \Omega_0^{\text{NR}-1/2} (1+z_{\text{rec}})^{-3/2} \\ &= 4 \times 10^{12} (\Omega_0^{\text{NR}} h^2)^{-1/2} \text{ s} \\ &= 140\,000 \times (\Omega_0^{\text{NR}} h^2)^{-1/2} \text{ ans} . \end{aligned}$$

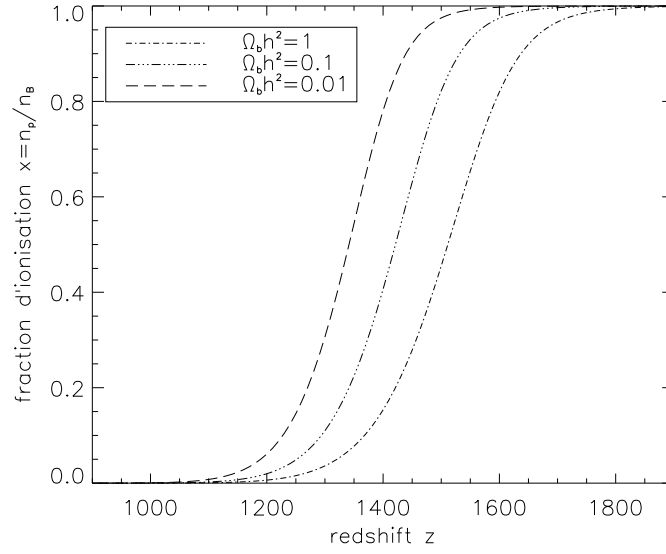


Fig. 2.3: Variation de la fraction d'ionisation en fonction du redshift. Pour 3 valeurs du produit $\Omega_b h^2$, on a représenté les variations de x en fonction de z . La recombinaison est définie comme étant le moment où $x = 0.1$, c'est-à-dire quand 90 % des électrons se sont liés aux protons. On trouve que, selon la valeur de $\Omega_b h^2$, la recombinaison s'est produite entre $z = 1200$ ($\Omega_b h^2 = 0.01$) et $z = 1400$ ($\Omega_b h^2 = 1$).

Pour des valeurs plausibles de Ω_0^{NR} (0.2) et de h (0.65), on trouve 500 000 ans.

Avec l'expansion, la température diminue et le libre parcours moyen des photons augmente. Le découplage des photons a lieu lorsque la distance moyenne séparant deux interactions est plus grande que la distance nous séparant de la surface de dernière diffusion (en d'autres termes l'intervalle de temps séparant deux interactions devient supérieur à l'intervalle de temps nous séparant du découplage, que l'on peut confondre avec l'âge de l'univers aujourd'hui) :

$$\ell_\gamma \sim \frac{1}{n_{e-} \sigma_T} > c \times t_{\text{univers}},$$

où $\sigma_T \sim 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$ est la section efficace de la diffusion Thomson et n_{e-} est la densité volumique des électrons libres (c'est l'Eq. 1.44 avec $v = c = 1$). Cette densité est donnée par :

$$n_{e-} = x \eta n_\gamma \quad \text{avec} \quad n_\gamma = \frac{2k^3 \zeta(3)}{\pi^2 \hbar^3 c^3} T^3 \sim 400 (1+z)^3 \text{ cm}^{-3}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} n_{e-} &= x \times 2.68 \times 10^{-8} \Omega_b h^2 \times 400 (1+z)^3 \text{ cm}^{-3} \\ &\sim x \times 10^{-5} \Omega_b h^2 (1+z)^3 \text{ cm}^{-3}. \end{aligned}$$

D'où le libre parcours moyen des photons :

$$\ell_\gamma \sim 10^{18} x^{-1} (\Omega_b h^2)^{-1} (1+z)^{-3} \text{ cm} \quad \text{avec} \quad x = x(z); \quad (2.4)$$

nous constatons qu'il augmente puisque la densité des électrons libre diminue au fur et à mesure que la recombinaison se poursuit. Pour comparer ℓ_γ à l'âge de l'univers, on fait la

même approximation que dans le cas de la recombinaison et on trouve pour le découplage un âge de :

$$\begin{aligned} t_{\text{dec}} \sim t_{\text{univers}} &= \frac{2}{3} H_0^{-1} (\Omega_0^{\text{NR}} h^2)^{-1/2} (1 + z_{\text{dec}})^{-3/2} \text{ s}, \\ &\sim 10^{17} (\Omega_0^{\text{NR}} h^2)^{-1/2} (1 + z_{\text{dec}})^{-3/2} \text{ s}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

On peut donc tracer les courbes $\ell_\gamma = g(1+z)$ et $t_{\text{univers}} = f(1+z)$ pour différentes valeurs des paramètres $\Omega_0^{\text{NR}} h^2$ pour l'âge et $\Omega_b h^2$ pour le libre parcours moyen (voir Fig. 2.4). Il faut également tenir compte de la dépendance en z du paramètre d'ionisation $x(z)$ via l'équation de Saha 2.3. Cela nous permet de donner un intervalle pour z_{dec} :

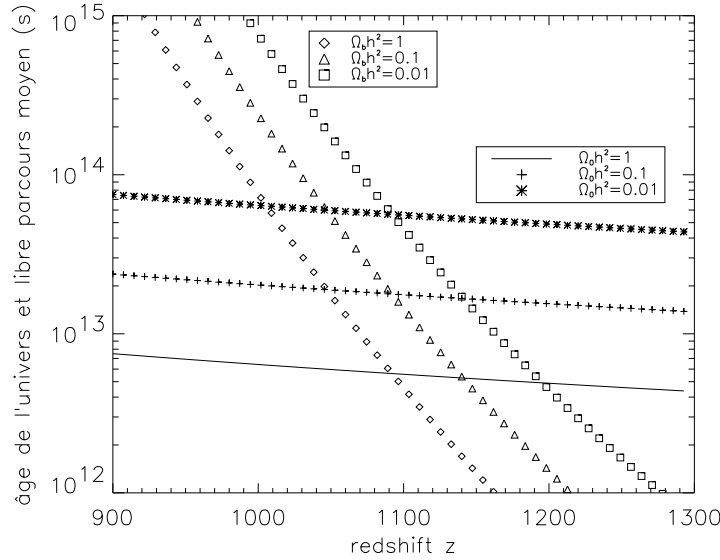


Fig. 2.4: Redshift du découplage des photons. Le libre parcours moyen des photons (courbes les plus pentues, dépendantes du paramètre $\Omega_b h^2$) devient plus grand (en durée) que l'âge de l'univers (courbes presque horizontales, dépendantes du paramètre $\Omega_0^{\text{NR}} h^2$) pour des redshifts proches de 1100.

$$1100 \leq z_{\text{dec}} \leq 1200$$

correspondant à une température de :

$$T_{\text{dec}} \sim 3000 \text{ K} = 0.25 \text{ eV} \quad \text{et à un âge de} \quad t_{\text{dec}} \sim 200\,000 (\Omega_0^{\text{NR}} h^2)^{-1/2} \text{ ans.}$$

Pour $\Omega_0^{\text{NR}} = 0.2$ et $h = 0.65$, on trouve 600 000 ans. Une fois les photons découplés, ils se propagent librement. Nous les détectons aujourd'hui sous la forme d'un rayonnement de corps noir d'une température de $2.728 \pm 0.004 \text{ K}$ à 95 % de niveau de confiance (Fixsen et al., 1996) ; c'est le CMB.

Le CMB est une des prédictions fondamentales de la théorie du *Big-Bang* ; c'est pour cette raison que de nombreuses expériences ont étudié ses principales caractéristiques : notamment son spectre, afin de vérifier s'il s'agit bien de celui d'un corps noir, sa température et son isotropie. Parmi ces expériences, citons la plus précise et la plus complète d'entre elles, le satellite américain COBE³ lancé en 1989 (voir Fig. 2.5). Voici les mesures et résultats dus à COBE :

³ Pour un récit détaillé de la mission COBE et des expériences liées au CMB, on peut lire le livre de Smoot (1994), traduit en français, "Les rides du temps", Flammarion 1994.

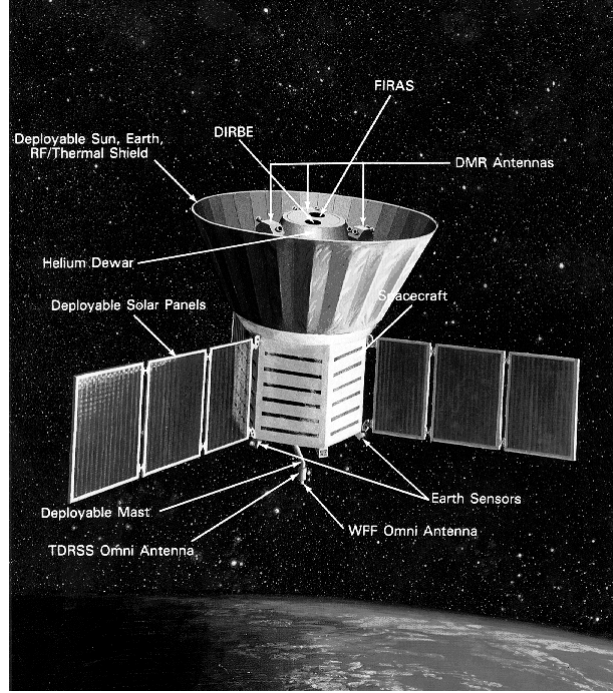


Fig. 2.5: **Instruments du satellite COBE.** Vue d'ensemble du satellite COBE. L'instrument DIRBE ("Diffuse Infrared Background Experiment") était destiné à rechercher un fond diffus infrarouge (Puget et al., 1996).

– le dipôle

Le système solaire est animé d'un mouvement relatif par rapport au CMB. Selon la direction dans laquelle nous observons le rayonnement, les photons ne seront pas vus avec la même énergie par effet Doppler. L'anisotropie de température associée (de l'ordre de 10^{-3} K) n'est donc pas intrinsèque au CMB, c'est un effet Doppler pur et il convient de le retirer pour étudier le CMB lui-même. COBE a mesuré que le dipôle était dans la direction $(l, b) = (264.31^\circ, 48.05^\circ)$ (coordonnées galactiques) avec une amplitude de 3.358 mK. L'anisotropie de température due au dipôle mesurée dans une direction faisant un angle θ avec celle du dipôle est :

$$\frac{\Delta T(\theta)}{T_0} = \frac{3.358 \times 10^{-3}}{T_0} \cos \theta, \quad \text{avec } T_0 = 2.728 \text{ K.}$$

– le spectre

L'instrument FIRAS ("Far Infrared Absolute Spectrophotometer") du satellite a mesuré la puissance rayonnée par le CMB à différentes fréquences ; Mather et al. (1994), ainsi que Fixsen et al. (1996) ont donc pu reconstruire le spectre du CMB. Il s'agit d'un spectre de corps noir presque parfait de température $T = 2.728 \pm 0.004$ K (il constitue en fait le meilleur corps noir que l'on connaisse actuellement ; même en laboratoire, on n'est pas capable de faire mieux).

– les fluctuations de température

L'instrument D.M.R. ("Differential Microwave Radiometer") a mesuré les *différences* de température entre deux points du ciel. Sa résolution angulaire est de 10° . Après avoir retiré toutes les sources de bruit et de contamination possibles par d'autres processus, Smoot et al. (1992) ont montré que le CMB n'était pas rigoureusement uniforme et qu'il existait des anisotropies intrinsèques de température. Ces fluctuations ont une dispersion de $30 \pm 5 \mu\text{K}$. Ce résultat très important signifie

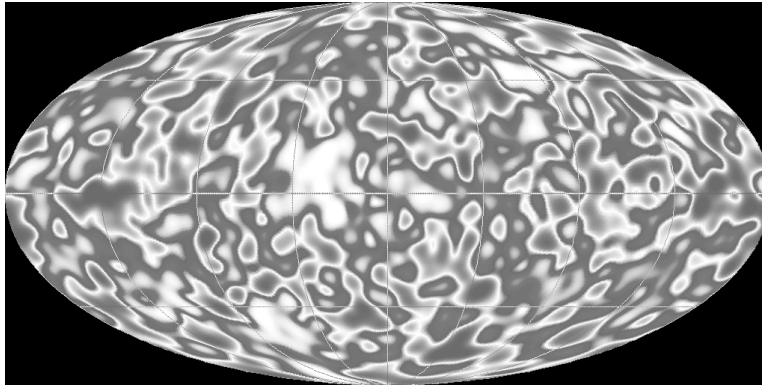


Fig. 2.6: Anisotropies du CMB. Le ciel, tel qu'il a été vu par COBE en utilisant 2 années de mesures. Le niveau moyen du ciel est 2.728 ± 0.004 K à 95 % de niveau de confiance et les fluctuations autour de cette valeur moyenne ont une dispersion de $30 \pm 5 \mu\text{K}$. Les zones claires sont un peu plus chaudes et les sombres, un peu plus froides. La taille angulaire de la plus petite structure est de 10° .

d'une part que le CMB a un haut degré d'homogénéité ($\Delta T/T \sim 10^{-5}$), ce qui valide notre hypothèse du principe cosmologique (voir pour comparaison la Fig. 1.2 page 8). D'autre part, on pense que les fluctuations de température observées sont dues à des inhomogénéités de matière déjà présentes lors du découplage et ont servi de germes pour la croissance des structures que nous observons aujourd'hui. Ces structures ont pu croître par instabilité gravitationnelle. La carte présentée dans la Fig. 2.6 a été construite à partir de 2 années de données de DMR, dipôle et plan galactique retirés.

L'origine des inhomogénéités présentes dans la carte des fluctuations de température du CMB n'est pas encore complètement clarifiée. Deux théories de l'univers primordial prétendent pouvoir générer de telles inhomogénéités : l'inflation et les défauts topologiques. Les mesures actuelles semblent favoriser très nettement celles provenant de l'inflation. Pour cette raison, nous n'aborderons pas les défauts topologiques.

2.3 Inflation

Nous avons commencé notre observation de l'univers inhomogène par l'univers actuel. Nous sommes remontés dans le temps, jusqu'à quelques centaines de milliers d'années, au moment de l'émission du CMB, où les traces des inhomogénéités sont déjà présentes. Nous nous intéressons ici à l'origine des fluctuations. Nous n'étudierons pas le mécanisme de génération des fluctuations primordiales (qui reste encore un domaine assez controversé), nous en donnerons juste une idée phénoménologique. La prédiction essentielle de l'inflation — vérifiable expérimentalement — est que les fluctuations produites obéissent à une statistique *gaussienne*. Les expériences de mesure des anisotropies du CMB, en plus de mesurer les paramètres cosmologiques, se proposent de déterminer la statistique des fluctuations de température du CMB, afin de contraindre les mécanismes de fabrication des fluctuations primordiales.

L'inflation a été initialement proposée pour résoudre certains problèmes que le modèle standard ne parvenait pas à surmonter. Nous allons voir quels étaient ces problèmes. Pour cela, nous considérerons que l'inflation s'est produite suffisamment tôt pour pouvoir

négliger la constante cosmologique à cette époque ; elle peut par contre être dominante aujourd'hui car l'expansion a diminué la valeur de la densité ρ .

2.3.1 Les problèmes de l'“ancien” modèle standard.

La théorie de l'inflation a été proposée pour la première fois par Guth (1981). Le titre de son article est : “*Inflationary Universe : A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems*”. En effet, malgré les innombrables succès du modèle standard décrit par l'Eq. de Friedmann :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2}, \quad (2.6)$$

(c'est l'Eq. 1.15 *sans constante cosmologique*) il reste des points précis qui sont restés sans réponse, comme les problèmes de l'horizon et de la platitude (“flatness problem”). Il repose également sur certaines *conditions initiales* qu'on a dû supposer sans pouvoir les justifier et les expliquer. Ce modèle standard était en fait surtout celui des années 70 : l'ajout dans ce modèle de l'inflation est devenu pratiquement incontournable dans la communauté scientifique de sorte que dans le “modèle standard” moderne, on inclut l'inflation.

le problème de la platitude

On peut écrire l'équation de Friedmann sous la forme suivante (avec $\Omega = \Omega_m$) :

$$|\Omega - 1| = \frac{|\kappa|}{H^2 a^2} = \frac{|\kappa|}{\dot{a}^2}. \quad (2.7)$$

L'expansion de l'univers se fait en se ralentissant (c'est du moins ce qu'on croyait à l'époque de l'ancien modèle standard !), c'est-à-dire que $|\dot{a}|$ est une fonction décroissante du temps. Or $\dot{a}^2 = H^2 a^2$ ce qui signifie que $|\Omega - 1|$ s'éloigne de 0. À partir de l'Eq. 1.29 page 20, on peut exprimer l'équation de Friedmann en z en fonction de cette même équation en z' , en ne considérant pas de constante cosmologique (on s'intéresse pour le moment à l'ancien modèle standard) :

$$H(z')^2 = H(z)^2 \left(\Omega^R \left(\frac{1+z'}{1+z} \right)^4 + \Omega^{\text{NR}} \left(\frac{1+z'}{1+z} \right)^3 + (1-\Omega) \left(\frac{1+z'}{1+z} \right)^2 \right)$$

avec $\Omega = \Omega^{\text{NR}} + \Omega^R$ et $\Omega_\kappa = 1 - \Omega$. De cette équation, on en déduit facilement celle gouvernant l'évolution de $\Omega = \Omega^{\text{NR}} + \Omega^R$:

$$\begin{aligned} \Omega' - 1 &= \frac{\Omega - 1}{1 - \Omega + \Omega^R \left(\frac{1+z'}{1+z} \right)^2 + \Omega^{\text{NR}} \left(\frac{1+z'}{1+z} \right)} \\ &= \frac{\Omega - 1}{1 - \frac{z - z'}{1+z} \underbrace{\left(\Omega^{\text{NR}} + \Omega^R \frac{2+z+z'}{1+z} \right)}_{\text{toujours positif}}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Nous pouvons déduire de cette équation plusieurs conséquences importantes :

- pour des grandes valeurs de z' , c'est-à-dire quand on va vers le passé, *tous les modèles d'univers tendent vers le modèle critique* :

$$|\Omega' - 1| \stackrel{z' \gg 1}{\sim} \frac{|\Omega - 1| (1 + z)^2}{\Omega^R z'^2} \xrightarrow{z' \rightarrow +\infty} 0 ;$$

- si, à un redshift z donné, on a la stricte égalité $\Omega = 1$ alors quelque soit z' ($z' < z$ ou $z' > z$), $\Omega' = 1$. Un univers plat sans constante cosmologique reste plat et a toujours été plat ;
- le point $\Omega = 1$ est *instable*. Dans un univers en expansion, supposons qu'à z on ait $\Omega = 1 + \varepsilon$ avec $0 < |\varepsilon| \ll 1$; si nous regardons l'évolution de Ω avec le temps, alors sa valeur en z' , avec $z > z'$, vérifie d'après la première forme de l'Eq. 2.8 :

$$\Omega' \sim -\frac{\Omega^{\text{NR}}}{\varepsilon} \frac{1 + z'}{1 + z} \quad \text{et} \quad \Omega' \xrightarrow{z \gg z'} 0.$$

Avec l'expansion, l'univers s'éloigne de plus en plus d'un univers critique.

Dans un modèle sans constante cosmologique, il découle de ce qui précède que, dans l'hypothèse où $\Omega_0 = \mathcal{O}(1)$ aujourd'hui (après une quinzaine de milliards d'années environ !), c'est que dans le passé Ω a dû être extrêmement proche de 1 (c'est l'Eq. 2.8 avec $z = 0$ et $z' \gg 1$). On appelle cet ajustement “fine tuning” en anglais, illustré dans la Fig. 2.7. À partir du fait que $\Omega_0 = \mathcal{O}(1)$ (aujourd'hui), on peut montrer que :

$$\Omega(z_{\text{Planck}}) - 1 = \mathcal{O}(10^{-60}) \quad (2.9)$$

à l'époque de Planck ($t_{\text{Planck}} = \mathcal{O}(10^{-43})$ s ou $z_{\text{Planck}} \sim 10^{32}$). Le fait que Ω ait été aussi proche de 1 dans le passé revient à négliger complètement le terme de courbure κ/a^2 ($\Omega_\kappa = \mathcal{O}(10^{-60})$) dans l'Eq. 2.6. Dans le cadre de ce modèle standard, aucun mécanisme ne peut expliquer que Ω soit égal à 1. Il faut considérer qu'il s'agit d'une *condition initiale*. Si l'Eq. 2.9 n'avait pas été vérifiée avec une telle précision à l'époque de Planck, soit l'univers se serait recontracté depuis longtemps, soit il serait si dilué qu'aucune étoile n'aurait pu se former. Le problème de la platitude est donc de devoir *admettre comme condition initiale* que l'univers a été, à l'époque de Planck, suffisamment proche de la platitude (à 10^{-60} près) pour qu'aujourd'hui encore le terme de courbure soit toujours proche de 0.

Le problème de l'horizon

La taille observable de la région correspondant à l'époque de l'émission du CMB est donnée par l'intersection de notre cône de lumière passé avec le plan d'espace pris à $t = t_{\text{dec}}$. Nous notons cette taille $d_{\text{passé}}(t_{\text{dec}})$, c'est notre horizon observable. L'image, homogène (à 10^{-5} près), est constituée par les photons provenant des points d'espace-temps situés dans notre horizon. L'homogénéité de ce rayonnement montre que toute la région observée a été en contact causal. Or la taille des régions causalement connectées à $t = t_{\text{dec}}$ est bien plus petite que la région observable : il n'y a donc aucune raison, selon ce modèle, pour que le CMB nous paraisse homogène sur tout le ciel (voir Fig. 2.8). Le problème de l'horizon réside dans le fait que la distance AA' est *beaucoup plus grande* que le cône de lumière futur $d_{\text{futur}}(t_{\text{dec}})$ des régions $Z1Z2$ et $Z'1Z'2$. Cette dernière distance est la distance maximale sur laquelle la physique causale a pu agir (c'est-à-dire thermaliser, homogénéiser). Les régions $Z1Z2$ et $Z'1Z'2$ sont donc, chacune d'elles et d'une façon

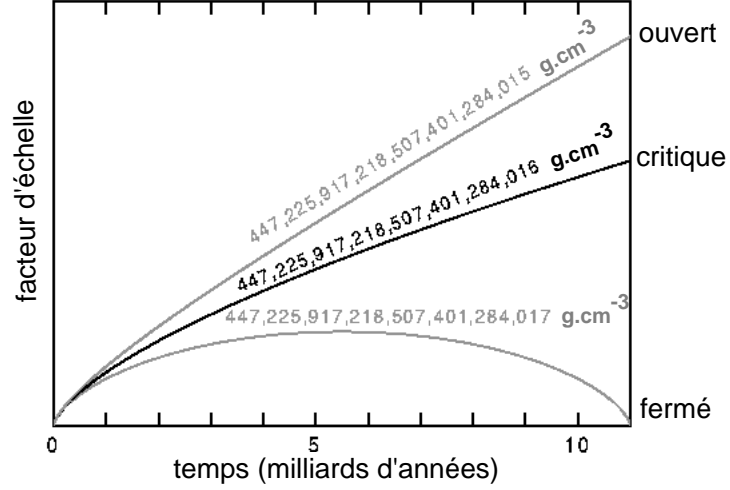


Fig. 2.7: **Problème de la platitude.** Même après 15 milliards d'années d'expansion il semble que nous soyons très proches aujourd'hui d'un univers plat (critique). Ce fait observationnel implique qu'à 10^{-9} s après le *Big-Bang*, la densité ρ de l'univers a dû être proche de la densité critique à 10^{-23} près; en extrapolant jusqu'au temps de Planck, cet ajustement a dû être vérifié à 10^{-60} près. La figure est adaptée de http://www.astro.ucla.edu/~wright/cosmo_03.htm.

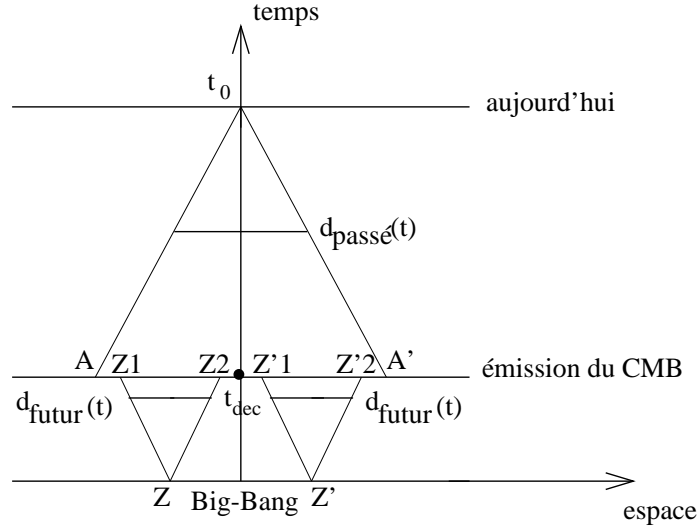


Fig. 2.8: **Problème de l'horizon.** La distance AA' (notre horizon visible actuel) est supérieure à la distance $d_{futur}(t_{dec})$ des régions $Z1Z2$ et $Z'1Z'2$. Le CMB n'a, dans ce modèle, aucune raison d'être homogène sur toute la sphère céleste puisque les points Z et Z' n'ont jamais été en contact causal.

indépendante, thermalisées. Il est donc surprenant que tout le ciel nous paraisse homogène alors que seules les petites régions $Z1Z2$ et $Z'1Z'2$ peuvent l'être. Nous allons calculer l'angle sous lequel est vu l'horizon à l'époque du découplage, dans le cas d'un univers plat $\Omega = 1$. Nous devons pour cela calculer la taille physique de l'horizon à $t = t_{dec}$. Cette taille est donnée par (voir l'Eq. 1.32 page 21) :

$$d_{\text{Horizon}} = \frac{a_{dec} c}{a_0 H_0} \left(\int_{z_{dec}}^{z_{eq}} \frac{dz}{E(z)} + \int_{z_{eq}}^{+\infty} \frac{dz}{E(z)} \right) \quad (2.10)$$

avec

$$E(z) \sim (\Omega_0^R(1+z)^4 + \Omega_0^{\text{NR}}(1+z)^3)^{1/2} \quad (2.11)$$

et

$$\Omega_0^R = \frac{\Omega_0^{\text{NR}}}{1+z_{\text{eq}}} \quad \text{par définition de } z_{\text{eq}}.$$

En ne prenant que la partie dominante dans chacune des intégrales, on trouve pour l'horizon :

$$d_{\text{Horizon}} = \frac{a_{\text{dec}} c}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_0^{\text{NR}}}} \left(\frac{2}{\sqrt{1+z_{\text{dec}}}} - \frac{1}{\sqrt{1+z_{\text{eq}}}} \right).$$

Nous avons ensuite besoin de calculer la distance angulaire. Elle est donnée par (voir Eq. 1.34 page 22) :

$$D_{\text{ang}} = \frac{a_{\text{dec}} c}{a_0 H_0} \int_0^{z_{\text{dec}}} \frac{dz}{E(z)} \quad (2.12)$$

soit

$$D_{\text{ang}} = \frac{2 c a_{\text{dec}}}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_0^{\text{NR}}}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z_{\text{dec}}}} \right).$$

L'angle sous lequel nous voyons aujourd'hui l'horizon tel qu'il était à l'époque du découplage est donc :

$$\delta\theta \triangleq \frac{d_{\text{Horizon}}}{D_{\text{ang}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+z_{\text{dec}}}} - \frac{1}{2\sqrt{1+z_{\text{eq}}}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{1+z_{\text{dec}}}}}. \quad (2.13)$$

Pour les valeurs que nous avons rencontrées jusque là, c'est-à-dire $z_{\text{dec}} \sim 1100$ et $z_{\text{eq}} \sim 2000$, on trouve un angle de 1° , c'est l'angle sous-tendu par chacune des régions $Z1Z2$ et $Z'1Z'2$ de la Fig. 2.8.

Le modèle standard de la cosmologie ne peut donc pas expliquer l'homogénéité du CMB sur *toute* la sphère céleste (180°) mais seulement sur 1° .

Le problème de la génération des fluctuations

L'univers, nous l'avons vu, n'est pas homogène. Il existe des structures qui se sont formées par effondrement gravitationnel de petites inhomogénéités, celles que nous voyons dans le CMB. On peut décomposer ces fluctuations en modes de Fourier de longueur d'onde physique $\lambda(t) = 2\pi a(t)/k$. Il est intéressant d'étudier le comportement de cette perturbation dans un univers dominé soit par la matière soit par le rayonnement. Dans un tel univers, $a(t) \propto t^n$ avec $n = 1/2$ ou $2/3$. λ étant proportionnel à a , aura la même dépendance en t . Par contre, le rayon de Hubble, $R_H(t) = H^{-1}(t) = t/n$, croît plus rapidement que λ . La pente de la fonction R_H change lorsque $t = t_{\text{eq}}$ (voir fig 2.9). On montre que si les perturbations s'étaient formées récemment et à l'intérieur du rayon de Hubble (c'est ce qui se produit dans le modèle que nous considérons ici), elles n'auraient pas eu

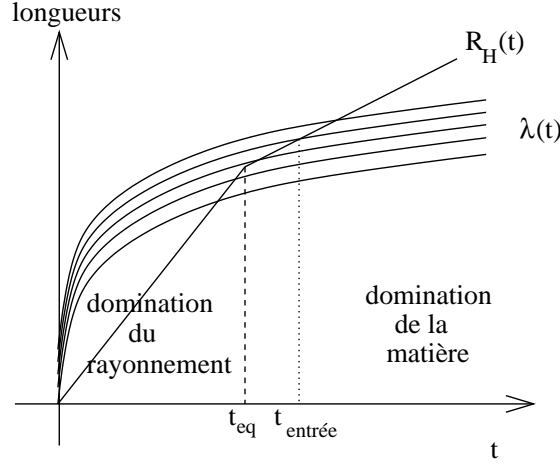


Fig. 2.9: **Problème de la formation des structures.** Dès les premiers instants, les perturbations sont situées au-delà de l'horizon. Toute échelle astrophysique pertinente aujourd'hui a été beaucoup plus grande que le rayon de Hubble à une certaine époque. La physique causale n'entre donc pas en ligne de compte pour ces échelles, seule la gravitation induite par la densité globale peut influencer les perturbations. Celles-ci ne peuvent entrer dans l'horizon qu'aux instants $t_{\text{entrée}}$. Une fois à l'intérieur, la physique causale peut les faire évoluer.

le temps de s'effondrer pour donner les structures que nous observons aujourd'hui. Elles ont donc été produites bien plus tôt, et à l'extérieur du rayon de Hubble. À cette échelle, seule la gravitation induite par la densité globale a pu les former (puisque la physique causale locale n'a pas eu le temps de s'exprimer). Le mécanisme de formation des structures proposé dans ce contexte est celui des défauts topologiques, très défavorisé par les mesures à haute résolution angulaire du CMB. Il apparaît ainsi que le modèle standard n'est pas capable de produire des fluctuations ayant les bonnes propriétés, celles capables de former les structures existantes.

2.3.2 Le concept d'inflation ; solutions aux problèmes du modèle standard

Il est possible de résoudre les trois problèmes vus précédemment en supposant que l'expansion de l'univers s'est faite de manière accélérée pendant sa prime jeunesse. Une telle expansion permettrait aux échelles physiques d'avoir été plus petites que le rayon de Hubble à des époques suffisamment reculées. Expansion accélérée signifie $\ddot{a} > 0$ (ou encore \dot{a} est croissante avec le temps, c'est ainsi que l'on *définit* l'inflation), ce que l'on n'a jamais avec une loi de croissance en t^n , avec $0 < n < 1$. Il faudrait donc une puissance $n > 1$ ou bien, par exemple, une croissance exponentielle $a(t) \propto e^{H(t_f - t_i)}$, où H est constante pendant cette période. L'expansion de l'univers serait alors due à la domination du rayonnement jusqu'au début de l'inflation (donc de $t = 0$ à $t = t_i$, où t_i caractérise le début de l'inflation), puis commence une croissance exponentielle jusqu'à la fin de l'inflation ($t = t_f$). Puis l'univers est à nouveau dominé par le rayonnement jusqu'à $t = t_{\text{eq}}$. Les valeurs typiques sont $t_i \sim 10^{-35}$ s, $H \sim 10^{10}$ GeV et $t_f \sim 70H^{-1} \sim 10^{-32}$ s. Dire que pendant l'inflation $\ddot{a} > 0$ est équivalent à dire que :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{H^{-1}}{a} \right) = \frac{d}{dt} \frac{1}{\dot{a}} < 0 \quad (2.14)$$

ou encore que :

$$p < -\frac{\rho}{3}, \quad (2.15)$$

via l'équation de Friedmann 1.16 page 12. La forme 2.14 montre que *pendant l'inflation*, le rayon de Hubble diminue (mesuré en coordonnées comobiles à cause du facteur $1/a$, c'est-à-dire reste constant en coordonnées propres), alors qu'à toute autre époque, il augmente avec le temps (puisque alors \dot{a} est décroissante avec le temps). Pendant l'inflation, la longueur d'onde propre de la perturbation augmente tandis que le rayon de Hubble reste constant. Il est donc possible, et c'est ici que réside tout l'intérêt de l'inflation, que la perturbation soit à l'intérieur du rayon de Hubble, lui permettant ainsi d'évoluer selon la physique causale. Une perturbation caractérisée par son mode k croise le rayon de Hubble dès que :

$$\frac{k}{Ha(t_{\text{croise}})} = 2\pi. \quad (2.16)$$

Pendant l'inflation, la perturbation devient plus grande que le rayon de Hubble lorsque $(2\pi/k)a(t_{\text{sortie}}) = H^{-1}$. Après la fin de l'inflation, le rayon de Hubble augmente à nouveau et rattrape la perturbation à $t = t_{\text{entrée}}(\lambda)$. L'inflation permet à la perturbation d'être à l'intérieur du rayon de Hubble à deux moments différents : avant $t_{\text{sortie}}(\lambda)$ et après $t_{\text{entrée}}(\lambda)$ (voir Fig. 2.10). Toute perturbation générée par un processus physique causal avant $t_{\text{sortie}}(\lambda)$ sera gelée entre $t_{\text{sortie}}(\lambda)$ et $t_{\text{entrée}}(\lambda)$ et pourra mener à des structures après $t_{\text{entrée}}(\lambda)$. L'inflation procure un mécanisme permettant aux perturbations d'évoluer par

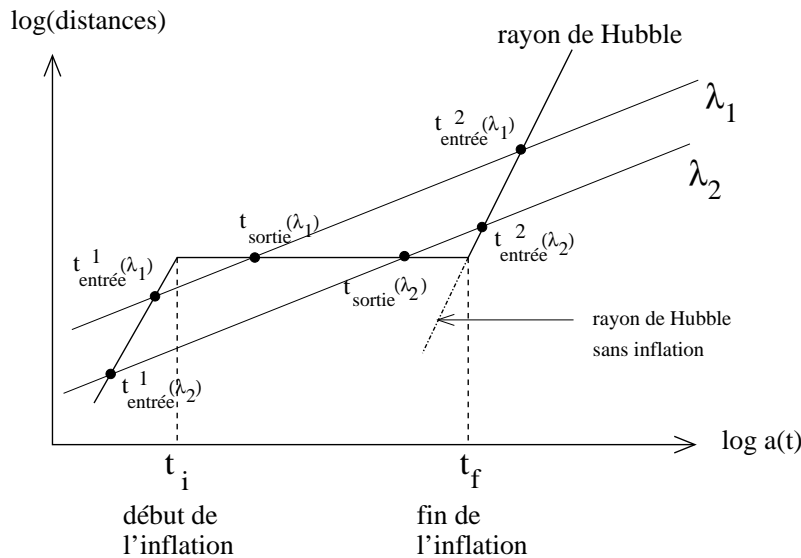


Fig. 2.10: Formation des structures avec inflation. Avant le début de l'inflation, l'univers est dominé par le rayonnement : une perturbation donnée (λ_1 ou λ_2) est encore située au-delà du rayon de Hubble, comme dans le cas d'un univers non inflationnaire. Elle rentre dans le rayon de Hubble à $t^1_{\text{entrée}}(\lambda_i) < t_i$ et peut évoluer selon les lois de la physique causale. Pendant l'inflation, le rayon de Hubble reste constant alors que les perturbations continuent de croître, leur permettant de sortir du rayon de Hubble à $t = t_{\text{sortie}}(\lambda_i)$. Elle est alors "gelée", c'est-à-dire qu'elle n'évolue plus. Après l'inflation, le rayon de Hubble augmente à nouveau et plus rapidement que les perturbations, permettant à λ_i de rentrer dans le rayon de Hubble une deuxième fois à $t = t^2_{\text{entrée}}(\lambda_i)$; elle continue son évolution pour former les structures.

des processus causaux suffisamment tôt pour pouvoir former les structures observées.

Le problème de la platitude est naturellement résolu dans ce modèle. En effet, l'inflation est un mécanisme qui *implique* $\Omega \rightarrow 1$ puisque le produit $Ha = \dot{a}$ augmente avec le temps. Toute période d'inflation rapproche Ω de 1 et donc d'un univers *plat* $\kappa = 0$. En effet, un univers avec constante cosmologique sera tel que :

$$\Omega' + \Omega'_\Lambda - 1 = \frac{\Omega + \Omega_\Lambda - 1}{1 - (z - z') \left(\frac{\Omega^{\text{NR}}}{1+z} + \Omega^{\text{R}} \frac{2+z+z'}{(1+z)^2} - \Omega_\Lambda \frac{2+z+z'}{(1+z')^2} \right)}.$$

Ω_Λ apparaît dans cette équation différemment des autres densités : d'une part elle vient avec le signe "−" et d'autre part elle fait intervenir le terme $(1+z')^2$. Si l'on considère que z est dans le passé de z' , alors $z > z'$ et les termes en Ω^{NR} et Ω^{R} deviennent négligeables par rapport au terme en Ω_Λ et il reste, si $\Omega + \Omega_\Lambda \neq 1$:

$$\frac{\Omega' + \Omega'_\Lambda - 1}{\Omega + \Omega_\Lambda - 1} \underset{z \gg z'}{\sim} \frac{(1+z')^2}{\Omega_\Lambda z^2} \underset{z \gg z'}{\longrightarrow} 0.$$

Un univers avec constante cosmologique tend vers un univers critique avec le temps.

Quant au problème de l'horizon, il est résolu en ce sens qu'une expansion exponentielle juste après le *Big-Bang* permet aux deux points Z et Z' de rentrer en contact causal, voir la Fig. 2.11.

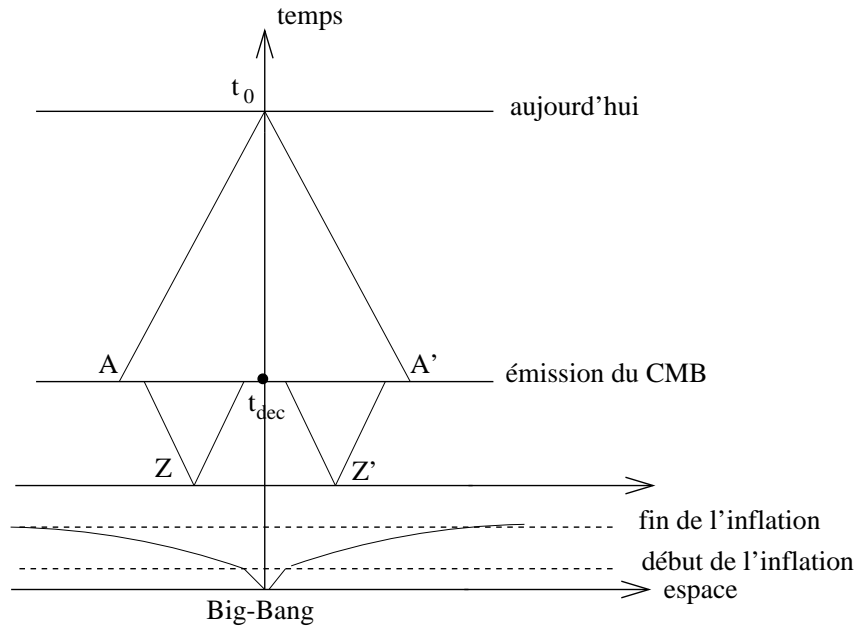


Fig. 2.11: Solution au problème de l'horizon. Une expansion accélérée de l'univers peu de temps après le *Big-Bang* permet aux deux points Z et Z' d'avoir été en contact causal, donc d'être à la même température, ce qui n'est pas le cas sans inflation (comparer avec la Fig. 2.8). La température des régions issues de Z et Z' au moment du découplage sera donc aussi la même bien que les régions considérées ne soient pas en contact causal (car leur distance relative est supérieure à l'horizon). De cette façon, on explique pourquoi le CMB est homogène sur tout le ciel.

2.3.3 Principe de la théorie de l'inflation

Nous avons vu que la condition d'avoir de l'inflation peut s'écrire (voir Eq. 2.15) :

$$\rho + 3p < 0.$$

Si la densité d'énergie de l'univers est dominée par celle d'un champ scalaire, alors cette condition est automatiquement vérifiée. On montre que dans ce cas, $p = -\rho$. L'existence d'un tel champ scalaire est prédite par la physique des particules. Les champs scalaires décrivent les particules de spin 0. Ils apparaissent lors d'une brisure spontanée de symétrie : par exemple, celle de la symétrie électrofaible fait apparaître le boson de Higgs, décrit par un champ scalaire, le champ de Higgs. L'univers primordial ayant été le théâtre de plusieurs brisures de symétrie, l'on s'attend à l'existence de champs scalaires à cette époque. À une température d'environ 10^{14} GeV, les interactions forte et électrofaible sont unifiées. Dans la plupart des modèles, c'est à cette échelle qu'a lieu l'inflation. Il existe une grande variété de théories inflationnaires avec des champs scalaires (voir Lyth & Riotto (1999) pour divers modèles). Nous allons décrire quelques aspects typiques des théories inflationnaires (voir Padmanabhan (1993)).

L'évolution du champ scalaire ϕ est gouvernée par son potentiel $V(\phi)$ qui admet un minimum absolu pour $\phi = \sigma \neq 0$ (c'est l'état fondamental du champ). La *forme* du potentiel dépend de la température d'équilibre T du système avec lequel il interagit, la position de l'état fondamental va donc lui aussi changer. Pour une température T supérieure à une certaine température critique T_c , le minimum du potentiel est en $\phi = 0$ et *pas* en $\phi = \sigma$ et la valeur du potentiel en ce point est de l'ordre de $V(0) \sim (10^{14} \text{ GeV})^4$. Pour $T \sim T_c$, un autre minimum apparaît à σ . Pour $T \ll T_c$, σ est le vrai minimum (c'est-à-dire absolu) du potentiel : $V(\sigma) = 0 \ll V(0)$. Lors de la chute de température, le champ qui se trouvait en $\phi = 0$ ne passe pas instantanément à $\phi = \sigma$, la transition peut demander un certain intervalle de temps pendant lequel la densité d'énergie du champ est constante, égale à $V(0)$. L'équation de Friedmann 2.6 nous montre que dans ce cas l'expansion de l'univers est exponentielle. Le passage vers $\phi = \sigma$ marque la fin de l'expansion (puisqu'alors la densité d'énergie du champ devient nulle). L'expansion exponentielle va diminuer la température jusqu'à quelques K. Plusieurs modèles existent, avec des potentiels différents, mais la plupart sont basés sur le fait que le champ ϕ accède *lentement* à sa valeur d'équilibre absolu σ . Ceci est nécessaire pour que l'inflation dure suffisamment longtemps pour résoudre les problèmes énoncés précédemment. On parvient à ces résultats en donnant au potentiel une forme assez plate pour que le champ le parcourt lentement : c'est le roulement lent ("slow-roll"). Lorsque le champ approche de son minimum absolu, il est soumis à un potentiel harmonique (développement limité du second ordre autour de $\phi = \sigma$) et va osciller avec une pulsation $\omega^2 = V''(\sigma)$. Ces oscillations sont amorties par l'expansion de l'univers, et par la décroissance du champ en d'autres particules en un temps de décroissance caractéristique Γ^{-1} (voir Kolb & Turner (1990)). Si $\Gamma^{-1} \ll H^{-1}$ alors l'énergie interne du champ $\rho = (1/2)\dot{\phi}^2 + V(\phi)$ est convertie en particules relativistes en un temps $\Delta t \sim \Gamma^{-1}$. L'univers connaît alors une phase de réchauffement ("reheating") jusqu'à la température qu'il avait avant l'inflation (en ordre de grandeur).

La source des perturbations générées par l'inflation sont les fluctuations quantiques du champ scalaire. La difficulté majeure dans le calcul des fluctuations est le passage du domaine quantique au domaine classique et nous n'aborderons pas cette question ici. Le résultat fondamental est que les fluctuations générées obéissent à une *statistique gaussienne* (Bardeen et al., 1986; Kiefer et al., 1998). C'est une prédiction assez générale de

l'inflation car la plupart des théories inflationnaires prédisent cette gaussianité. Les fluctuations produites vont être, à cause de l'expansion, étirées sur des échelles bien plus grandes que le rayon de Hubble et vont se traduire par des fluctuations dans la *métrique* (voir section 2.4.5, page 72). Leur amplitude est par contre très faible. Elle augmente jusqu'à devenir macroscopique lors du réchauffement quand les particules créées à ce moment se propagent dans cette métrique perturbée. Les fluctuations peuvent être décomposées en différentes catégories selon leur nature *géométrique*. On distingue les perturbations *scalaires* (correspondant aux fluctuations de densité de la matière), les perturbations *vectorielles* (correspondant à la vorticité de la matière) et les perturbations tensorielles (correspondant aux ondes gravitationnelles primordiales, *qui ne se couplent pas à la matière*). Nous verrons dans la suite que les perturbations vectorielles ne jouent aucun rôle significatif car leur amplitude diminue au cours de l'expansion. Les perturbations scalaires et tensorielles vont contribuer aux anisotropies observées dans le CMB et leur importance relative est caractérisée par leur spectre de puissance. L'étude des fluctuations du CMB, couplées à celles de la métrique, permet en principe de mesurer ou du moins de contraindre ces spectres de puissance, ainsi que certains paramètres des théories inflationnaires. Nous allons voir quels sont ces paramètres.

Un peu de formalisme

L'expression mathématique du potentiel fait apparaître des paramètres libres (par exemple le couplage du champ avec lui-même) qui peuvent être contraints par les mesures de spectre de puissance des anisotropies du CMB. C'est pourquoi l'on attend beaucoup des futures expériences précises comme MAP et PLANCK pour affiner les théories inflationnaires. Nous allons donner quelques résultats quantitatifs relatifs aux prédictions de l'inflation.

À partir du lagrangien, on peut calculer la densité d'énergie et la pression du champ scalaire ; ils sont donnés par :

$$\begin{aligned}\rho_\phi &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \\ p_\phi &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi).\end{aligned}$$

Par exemple, le champ de Higgs a un potentiel $V(\phi) = \lambda(\phi^2 - M^2)^2$, un champ scalaire massif a un potentiel $V(\phi) = (1/2)m^2\phi^2$ et un champ auto-interagissant est décrit par $V(\phi) = \lambda\phi^4$.

En remplaçant les valeurs de p et ρ dans les équations de Friedmann, on obtient :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(V(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \right) \quad \text{et} \quad \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V',$$

où les points sont des dérivées par rapport au temps et le prime par rapport à ϕ . On a négligé la courbure puisque nous avons vu qu'elle était très petite à cette époque. Cette dernière équation est équivalente à l'équation de conservation :

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p) = -3H\dot{\phi}^2,$$

ce qui nous permet d'exprimer d'une façon générale \dot{H} en fonction de $\dot{\phi}^2$:

$$\dot{H} = -4\pi G\dot{\phi}^2. \tag{2.17}$$

On voit que H est une fonction décroissante du temps ; l'expansion est exponentielle (elle nous assure $\ddot{a} > 0$) si $H = \dot{a}/a = C^{\text{te}}$, ce qui est réalisé d'après cette dernière équation si $\dot{\phi} = C^{\text{te}}$. Dans ce cas, $\dot{\phi} \sim 0$ et $V(\phi)$ constant : cela peut se produire si le champ est piégé dans un minimum local de son potentiel V .

La condition d'inflation $\rho + 3p < 0$ (c'est-à-dire $\ddot{a} > 0$) devient, en remplaçant par les expressions de p et ρ , $V > \dot{\phi}^2$: l'énergie potentielle est supérieure à l'énergie cinétique. Il y a inflation lorsque la partie cinétique du champ scalaire est inférieure à sa partie potentiel. Nous voulons que l'inflation dure suffisamment longtemps pour que le CMB nous paraisse homogène et que Ω soit suffisamment proche de 1 ; il faut pour cela que H varie lentement par rapport au taux d'expansion, soit :

$$\frac{|\dot{H}|}{H} \ll H \iff V > \dot{\phi}^2 \quad (2.18)$$

et pour que l'inflation dure suffisamment longtemps, il faut que l'accélération du champ soit lente devant le taux d'expansion :

$$\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} \ll H. \quad (2.19)$$

Les deux dernières équations sont les équations de "roulement lent" ("slow-roll"). On introduit en général deux paramètres dits de roulement lent définis par :

$$\epsilon(\phi) = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 \quad \text{et} \quad \eta(\phi) = \frac{1}{8\pi G} \frac{V''(\phi)}{V(\phi)},$$

de sorte que les conditions de roulement lent deviennent :

$$\epsilon \ll 1 \quad \text{et} \quad |\eta| \ll 1.$$

Le paramètre ϵ contraint la pente du potentiel tandis que η contraint sa courbure. L'inflation prend fin dès que l'un de ces deux paramètres est de l'ordre de 1. Dans le cas de roulement lent, les équations du mouvement deviennent :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} V \quad (2.20)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{V'}{3H}. \quad (2.21)$$

Le paramètre ϵ peut aussi servir à paramétrer l'équation d'état du champ scalaire ; pour cela, on écrit que $p + \rho$ est égal à $\dot{\phi}^2$ et l'on remplace $\dot{\phi}$ par son expression donnée dans l'Eq. 2.21. On écrit ensuite H^2 selon l'Eq. 2.20 et on trouve :

$$p = -\rho(1 - 2\epsilon/3).$$

De même, on obtient une forme particulièrement simple pour l'équation de Friedmann : on part de l'expression de \dot{H} en fonction de $\dot{\phi}^2$ (Eq. 2.17) en remplaçant $\dot{\phi}$ par l'Eq. 2.21 pour obtenir que $\dot{H} = -(V'/V)^2/6$, puis on utilise le fait que $\ddot{a}/a = H^2 + \dot{H}$ pour obtenir :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1 - \epsilon).$$

Le paramètre ϵ , que l'on peut mesurer à partir des anisotropies de température du CMB, est donc très important pour caractériser le potentiel du champ scalaire. Il nous donne

accès à sa forme et à l'équation d'état du champ. Tant que l'approximation de roulement lent est valide (on suppose que l'inflation commence à t_i et se termine à t_f), $\epsilon \ll 1$ et on a, puisque H est presque constant :

$$a(t) = a(t_i) e^{\int_{t_i}^t H(t) dt} \sim a(t_i) e^{H \times (t-t_i)} \quad \text{avec} \quad t_i < t < t_f,$$

$$\text{et} \quad t_i = \mathcal{O}(10^{-34}), \quad t_f = \mathcal{O}(10^{-32}).$$

On caractérise la durée totale de l'inflation par le logarithme de l'accroissement du facteur d'échelle (c'est le nombre N de "e-folds") :

$$N = \ln \frac{a(t_f)}{a(t_i)} = \int_{t_i}^{t_f} H(t) dt \sim 2\sqrt{\pi G} \left| \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{d\phi}{\sqrt{\epsilon(\phi)}} \right| \sim -8\pi G \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V'} d\phi.$$

Pour résoudre les problèmes du modèle du *Big-Bang* standard dont nous avons parlé précédemment, on montre qu'il faut que $N \geq 60$ (cette valeur change un peu selon les détails du modèles considéré : échelle d'énergie de l'inflation, durée du "reheating"...).

Nous avons vu que l'inflation permettait non seulement de combler certaines lacunes du modèle standard mais en plus fournissait un moyen de générer des fluctuations. Nous n'aborderons pas le mécanisme responsable de la transition entre les fluctuations quantiques du champ scalaire et les fluctuations classiques, responsables des anisotropies du CMB et de l'existence des structures. Les modèles les plus classiques d'inflation génèrent des fluctuations obéissant à une statistique gaussienne. Les fluctuations les plus importantes pour la cosmologie sont les fluctuations scalaires (d'amplitude δ_H , que l'on peut identifier avec des fluctuations de densité) et tensorielles (d'amplitude A_G , décrivant les ondes gravitationnelles primordiales). Les fluctuations vectorielles, liées à la vorticité du fluide cosmique, ne jouent pas de rôle important en cosmologie car elles décroissent avec l'expansion (voir page 67). L'évolution d'une perturbation est gelée dès lors que sa longueur d'onde ($\lambda = 2\pi a/k$) devient plus grande que le rayon de Hubble puisqu'aucun processus de physique causale ne peut la faire évoluer. Par définition, l'amplitude des fluctuations est l'amplitude évaluée lorsque la perturbation traverse le rayon de Hubble, c'est-à-dire pour $k = aH$. On montre que les amplitudes des fluctuations scalaires et tensorielles pour une onde de nombre d'onde k sont données par :

$$\delta_H(k) \hat{=} \int \frac{\rho(x) - \langle \rho \rangle}{\langle \rho \rangle} e^{ikx} d^3k = \sqrt{\frac{512\pi}{75}} \frac{G^{3/2} V^{3/2}}{|V'|} \Big|_{k=aH} \quad (2.22)$$

$$A_G(k) = \sqrt{\frac{32}{75}} G V^{1/2} \Big|_{k=aH} \quad (2.23)$$

où k est le nombre d'onde comobile. Ces amplitudes dépendent du potentiel du champ et de sa dérivée première.   partir des modes de Fourier des perturbations, on peut définir leur spectre de puissance P de la manière suivante (Stewart et Lyth, 1993) :

$$\langle \mathcal{C}(k) \mathcal{C}^*(k') \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} P_{\mathcal{C}} \delta(k - k')$$

où \mathcal{C} remplace scalaire ou tensoriel. Pour le mode scalaire, on trouve (Kinney, 1998) :

$$P_{\mathcal{R}}^{1/2}(k) = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{\pi}} \frac{H}{\sqrt{\epsilon}} \Big|_{k=aH}. \quad (2.24)$$

L'indice \mathcal{R} correspond à la courbure, pour rappeler que les fluctuations de densité se traduisent en courbure de la métrique. Dans les modèles simples, on suppose en général une loi de puissance pour $P_{\mathcal{R}}$ et elle est caractérisée par son *indice spectral*, que l'on note habituellement n ; il est défini par :

$$n - 1 = \frac{d \ln(P_{\mathcal{R}})}{d \ln(k)}.$$

Quant au spectre de puissance des fluctuations, tensorielles, on a :

$$P_{\mathcal{T}}^{1/2}(k) = \frac{4\sqrt{G} H}{\sqrt{\pi}} \bigg|_{k=aH}. \quad (2.25)$$

On lui suppose également une loi de puissance, d'indice spectral n_T :

$$n_T = \frac{d \ln(P_{\mathcal{T}})}{d \ln(k)} = -2\epsilon.$$

Le rapport des deux spectres est :

$$\frac{P_{\mathcal{T}}}{P_{\mathcal{R}}} = 16 \epsilon = 1.16 r. \quad (2.26)$$

Les modes tensoriels sont donc négligeables pour $\epsilon \ll 1$. L'indice spectral des perturbations tensorielles n'est pas un paramètre indépendant :

$$n_T = -\frac{1}{8} \frac{P_{\mathcal{T}}}{P_{\mathcal{R}}}.$$

Cette dernière relation est automatiquement vérifiée si le modèle d'inflation est cohérent (c'est un test de cohérence interne, valable seulement pour le modèle à un seul champ scalaire). Un modèle d'inflation se réduit donc à ces trois paramètres : $P_{\mathcal{T}}$, $P_{\mathcal{R}}$ et n , dépendants eux-mêmes du paramètre de roulement lent ϵ . Un modèle donné fournit les spectres de puissance, dont on peut en déduire ceux attendus pour les fluctuations de température du CMB. À partir du modèle — c'est-à-dire à partir d'un potentiel — on calcule ϵ et η . On calcule ensuite N en fonction du champ scalaire, en utilisant ϵ . On inverse ensuite la relation pour trouver $\phi(N) = \phi_N$ ($N \geq 60$), valeur du champ pour laquelle le facteur d'échelle de l'univers s'est accru de e^N . On calcule enfin les spectres de puissance en fonction de ϕ et on calcule leur valeur pour $k = aH$. Réciproquement, lorsque les mesures d'anisotropies de température et de polarisation du CMB auront une précision suffisante, nous pourrions contraindre fortement les spectres de puissance des fluctuations scalaires et tensorielles, ce qui contraindra aussi ϵ etc... Nous serons alors capables de déterminer la forme du potentiel du champ scalaire responsable de l'inflation.

2.4 Perturbations cosmologiques

Nous avons vu que l'inflation génère de façon naturelle des fluctuations. Celles-ci sont caractérisées par leur spectre de puissance et se traduisent par des fluctuations dans la métrique qui ne peut plus être décrite par une expression de type Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Cependant, les fluctuations sont petites et les traiter dans le cadre

de la théorie des perturbations est justifié. À l'ordre 0 nous pouvons considérer que la métrique est de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (voir page 12) mais il convient de lui ajouter des potentiels d'ordre 1 rendant compte de la présence des fluctuations.

Nous nous proposons dans cette partie d'étudier l'évolution des perturbations sous l'effet de la gravitation.

Afin de clarifier l'exposé, nous commencerons par présenter une approche newtonienne (voir Peebles (1980) et Bartlett (1999)) : nous considérerons des champs gravitationnels faibles, des perturbations dont la dimension caractéristique est plus petite que l'horizon (car la physique newtonienne ne peut pas décrire ce qu'il se passe au-delà de l'horizon) et des fluides non relativistes. Ces approximations sont par exemple valables pour des époques plus récentes que l'égalité matière-rayonnement dans des régions relativement petites de l'univers par rapport au rayon de Hubble et au rayon de courbure. Précisons que la théorie newtonienne ne peut pas rendre compte des fluctuations de type tensorielles (les ondes gravitationnelles primordiales).

2.4.1 Approche newtonienne

L'univers est rempli d'un fluide non relativiste (domination de la matière) de densité $\rho(\vec{x}, t)$. On repère un point par sa coordonnée comobile \vec{r} ou par sa coordonnée propre $\vec{x} = a(t)\vec{r}$. Toute variation du potentiel gravitationnel $\phi(\vec{r}, t)$ se propage avec une vitesse infinie. Sous ces hypothèses, on peut écrire l'équation de continuité de ce fluide et son équation du mouvement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t) + \nabla_{\vec{x}}(\rho \vec{u}(t, \vec{x})) = 0 \quad (2.27)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla_{\vec{x}}) \vec{u} \right) = -\rho \nabla_{\vec{x}} \phi(t, \vec{x}) - \nabla_{\vec{x}} p(t, \vec{x}). \quad (2.28)$$

On peut également obtenir l'équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel :

$$\nabla_{\vec{x}}^2 \phi = 4\pi G \rho.$$

Dans ces équations, p est la pression du fluide et $\vec{u} = d\vec{x}/dt$ sa vitesse. Les gradients sont pris au point \vec{x} et à un temps t fixé. Pour avoir l'équivalent de ces équations en fonction du paramètre d'échelle a , nous allons les exprimer à l'aide de la coordonnée comobile \vec{r} plutôt qu'avec la coordonnée physique propre \vec{x} . Les nouvelles variables sont donc (t, \vec{r}, \vec{v}) au lieu de (t, \vec{x}, \vec{u}) :

$$\vec{v} = \vec{u} - \frac{\dot{a}}{a} \vec{x} = a \dot{\vec{r}}$$

$$\text{avec } \vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt}, \quad \vec{x} = a\vec{r}.$$

L'opérateur $\nabla_{\vec{r}}$, gradient au point comobile \vec{r} sera désormais noté ∇ . La vitesse \vec{v} d'un point quelconque a donc deux contributions distinctes : la première est due à l'expansion, égale à $\dot{a}\vec{r}$ (loi de Hubble) et l'autre est le mouvement propre du point (ne participant pas à l'expansion, c'est la "peculiar velocity" en anglais), égale à $a\dot{\vec{r}}$. En réécrivant les équations de continuité 2.27 et du mouvement 2.28 avec ces nouvelles coordonnées ⁴, on

⁴ Utiliser le fait que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\vec{x}} f(\vec{x}/a, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\vec{r}} f(\vec{r}, t) - \frac{\dot{a}}{a} (\vec{r} \cdot \nabla) f(\vec{r}, t) \quad \text{et que} \quad \nabla_{\vec{x}} f(x/a, t) = \frac{1}{a} \nabla f(\vec{r}, t).$$

obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + \frac{1}{a}\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.29)$$

$$\ddot{a}\vec{r} + \dot{\vec{v}} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{v} + \frac{1}{a}(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{a}\nabla\phi - \frac{1}{a\rho}\nabla p. \quad (2.30)$$

L'Eq.de Poisson devient quant à elle :

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho a^2 + 12\pi Gp a^2 \quad (2.31)$$

où le second terme du membre de droite a été ajouté à la main pour coïncider avec la limite newtonienne des équations de Friedmann et traduit le fait qu'en relativité générale seulement, la pression est source de gravitation.

2.4.2 Solutions uniformes

Comme les écarts à l'uniformité sont petits, on commence par chercher les solutions qui décrivent le comportement du fond qui, lui, est rigoureusement uniforme et fixe en coordonnées comobiles :

$$\rho = \rho_b(t), \quad p = p_b(t) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \vec{0}.$$

Les Eqs. 2.29, 2.30 et 2.31 deviennent :

$$\frac{\partial \rho_b(t)}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_b(t) = 0 \quad (2.32)$$

$$\ddot{a}\vec{r} = -\frac{1}{a}\nabla\phi_b \quad (2.33)$$

$$\Delta\phi_b = 4\pi G\rho_b(t)a^2 + 12\pi Gp_b(t)a^2. \quad (2.34)$$

La première de ces équations nous donne la variation de densité en fonction du facteur d'échelle : $\rho_b(t) \propto a(t)^{-3}$, résultat cohérent avec celui que nous avons trouvé page 13, lorsque que nous avons décrit un univers dominé par la matière non relativiste. Enfin, en prenant la divergence de la deuxième équation et en utilisant la troisième, nous retrouvons la seconde équation de Friedmann :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho_b + 3p_b).$$

On retrouve la première en injectant l'équation de continuité 2.32 :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho_b - \frac{k}{a^2}$$

où k apparaît ici comme une constante d'intégration. Dans notre calcul, c'est l'énergie de liaison de l'univers en expansion (compétition entre expansion — $\dot{a}^2/2$ — et gravitation — $4\pi G a^2 \rho/3$). En relativité générale, c'est la courbure.

2.4.3 Perturbation du modèle

Nous connaissons les équations que doivent vérifier les fonctions ρ_b , p_b , ϕ_b et \vec{x} pour le fond. Nous allons ajouter des perturbations à ce modèle parfaitement homogène et isotrope. Pour cela, on écrit les fonctions ρ , p et ϕ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\rho(t, \vec{r}) &= \rho_b(t) + \delta\rho(t, \vec{r}) = \rho_b(t)(1 + \delta(t, \vec{r})) \\ p(t, \vec{r}) &= p_b(t) + \delta p(t, \vec{r}) \\ \phi(t, \vec{r}) &= \phi_b(t, \vec{r}) + \varphi(t, \vec{r})\end{aligned}$$

Lorsque l'on réécrit les Eqs. 2.32, 2.33 et 2.34 et que l'on ne conserve que les infiniments petits du premier ordre, on obtient les équations d'évolution des perturbations :

$$\dot{\delta} + \frac{1}{a}\nabla\vec{v} = 0 \quad (2.35)$$

$$\dot{\vec{v}} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{v} = -\frac{1}{a}\nabla\varphi - \frac{1}{a\rho_b}\nabla\delta p \quad (2.36)$$

$$\Delta\varphi = 4\pi G a^2 \rho_b \delta + 12\pi G \delta p a^2. \quad (2.37)$$

Cette dernière équation montre que la source de φ est le contraste de densité δ , défini par :

$$\delta = \frac{\rho - \rho_b}{\rho_b}.$$

En considérant que les fonctions relatives au fond sont connues (celles avec l'indice “ b ”), il reste 4 inconnues (δ , δp , φ et \vec{v}). N'ayant que 3 équations, on doit fournir une quatrième contrainte pour que l'on puisse résoudre le système : on ajoute une *équation d'état* reliant la pression à la densité $p = f(\rho)$ soit $\delta p = g(\delta\rho)$. On obtient facilement l'équation d'évolution du contraste de densité δ en dérivant l'Eq. 2.35 par rapport à t , en prenant la divergence de l'Eq. 2.36 et en éliminant les termes d'ordre plus grand que 1. Elle s'écrit :

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 4\pi G \rho_b \delta + \frac{1}{a^2 \rho_b} \Delta \delta p. \quad (2.38)$$

Elle décrit l'évolution de perturbations scalaires. Le terme scalaire signifie que ces perturbations sont décrites par des fonctions scalaires. C'est évident pour δ qui est une fonction scalaire mais cela l'est moins pour le vecteur vitesse (car on a utilisé l'équation du mouvement pour trouver cette équation). Il existe donc une partie scalaire dans le vecteur vitesse. Ce résultat devient beaucoup plus clair si l'on décompose celui-ci en composantes tangentielles (\parallel) et orthogonales (\perp) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \\ \text{avec } \nabla \wedge \vec{v}_{\parallel} &= \vec{0} \\ \text{et } \nabla \cdot \vec{v}_{\perp} &= 0.\end{aligned}$$

On peut montrer d'une part que cette décomposition est toujours possible, d'autre part qu'il existe une fonction *scalaire* f telle que

$$\vec{v}_{\parallel} = \nabla f \quad (2.39)$$

et enfin qu'il existe une fonction *vectorielle* \vec{A} telle que :

$$\vec{v}_{\perp} = \nabla \wedge \vec{A}. \quad (2.40)$$

De cette façon, lorsque l'on a pris la divergence de l'équation du mouvement 2.36, la partie vectorielle a été éliminée par définition de \vec{v}_\perp . De ce fait, seule la partie scalaire de \vec{v} intervient (implicitement) dans l'Eq. 2.39. Pour ce qui est de la partie vectorielle, il faut prendre le rotationnel de l'équation du mouvement pour éliminer cette fois-ci la partie scalaire et l'on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \wedge \vec{v}_\perp) + \frac{\dot{a}}{a}(\nabla \wedge \vec{v}_\perp) = \vec{0}$$

dont la solution décroît en $1/a$. On trouve alors un résultat important : *les modes vectoriels diminuent avec l'expansion de l'univers*. Ces modes vectoriels sont reliés à la *vorticité* du fluide. Dans notre approche newtonienne, les modes scalaires sont engendrés par la gravitation.

2.4.4 Solutions du modèle perturbé

Reprenons l'équation gouvernant les perturbations scalaires (on oublie les perturbations vectorielles, qui décroissent) :

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 4\pi G\rho_b\delta + \frac{1}{a^2\rho_b}\Delta\delta p. \quad (2.41)$$

Supposons tout d'abord que la pression soit nulle : $\delta p = 0$. Nous distinguons ensuite, sous cette hypothèse les cas suivants :

1. $\Omega^{\text{NR}} = 1$, domination de la matière, $\rho_b \propto a^{-3}$.

Dans ce cas, on trouve les solutions suivantes :

$$\begin{cases} a(t) & \propto t^{2/3} \\ \delta_c & \propto t^{2/3} \propto a \\ \delta_d & \propto t^{-1} \propto a^{-3/2}. \end{cases}$$

Les indices “ c ” et “ d ” correspondent aux deux solutions indépendantes de l'équation croissante et décroissante respectivement. Nous constatons qu'il existe des *modes croissants dans un univers dominé par la matière*. Avec le temps, ces perturbations vont s'accroître proportionnellement au facteur d'échelle, donc proportionnellement à la puissance $2/3$ du temps.

2. $\Omega^{\text{R}} = 1$, domination du rayonnement, $\rho_b \propto a^{-4}$.

Dans ce cas, la perturbation δ de la matière non relativiste est négligeable et l'Eq. 2.41 se réduit à son seul membre de gauche, le membre de droite devenant nul. Les solutions sont alors données par :

$$\begin{cases} a(t) & \propto t^{1/2} \\ \delta_1 & = C^{\text{te}} \\ \delta_2 & \propto -\ln t. \end{cases}$$

Dans un univers dominé par le rayonnement, on ne trouve pas de mode croissant. L'expansion se fait de manière trop rapide pour que les surdensités puissent se condenser.

3. $\Omega_\Lambda = 1$, domination de Λ , $\rho_b = C^{\text{te}}$.

$$\begin{cases} a & \propto e^{Ht} \\ \delta_1 & \propto C^{\text{te}} \\ \delta_2 & \propto a^{-2}. \end{cases} \quad \text{avec} \quad H = C^{\text{te}}$$

Là non plus, il n'y a pas de mode croissant.

4. $\Omega = 0$, domination de la courbure, $\rho_b = 0$.

Les solutions sont :

$$\begin{cases} a & \propto & t \\ \delta_1 & \propto & C^{\text{te}} \\ \delta_2 & \propto & a^{-1}. \end{cases}$$

Dans ce dernier cas, on ne trouve pas non plus de mode croissant.

Ces résultats ont été obtenus en supposant que les fluctuations de la pression étaient nulles. Les choses se compliquent lorsque cette approximation n'est plus valable. Le terme en $\Delta\delta p$ dans l'Eq. 2.41 nous conduit à nous donner une équation d'état. Prenons-en une particulièrement simple, celle d'un gaz parfait soumis à des oscillations acoustiques adiabatiques :

$$p = p_b + \delta p = p_b + \delta \rho \left(\frac{\delta p}{\delta \rho} \right)_{\text{adiab.}} = p_b + c_s^2 \rho_b \delta,$$

où c_s est la vitesse de propagation des ondes sonores dans ce milieu. Dans le cas d'une vitesse du son constante, on peut résoudre l'Eq. 2.41 dans l'espace de Fourier et l'on obtient :

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}}(t) + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{\vec{k}}(t) = \left(4\pi G\rho_b(t) - \frac{k^2 c_s^2}{a^2} \right) \delta_{\vec{k}}(t).$$

Cette expression a le mérite de faire apparaître très clairement la compétition entre le terme gravitation $4\pi G\rho_b(t)$ et le terme de pression acoustique $k^2 c_s^2 / a^2$. La gravitation intervient comme source avec un signe positif et tend à effondrer la matière environnante, contrairement à la pression qui est dissipative. Il existe une échelle critique pour laquelle les deux contributions sont égales, c'est l'*échelle de Jeans*. Elle est caractérisée par le nombre d'onde k_J défini par :

$$4\pi G\rho_b = \frac{c_s^2 k_J^2}{a^2}$$

soit encore, en introduisant la longueur d'onde λ_J associée à k_J :

$$a(t) \lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_b}}.$$

La masse contenue dans une sphère de rayon $a(t) \lambda_J$ est :

$$M_J(t) = \frac{4}{3}\pi (a \lambda_J)^3 \rho_b.$$

Physiquement, cette équation signifie qu'une région de l'espace de taille $a(t) \lambda_J$ et de masse supérieure ou égale à la masse de Jeans correspondant à cette taille pourra s'effondrer car le terme de gravitation (attractif) est dominant par rapport au terme de pression (dissipatif).

Il apparaît donc dans ces calculs que les perturbations de densité ne peuvent s'amplifier par effondrement gravitationnel que dans une période de domination de la matière. Pour comprendre physiquement les forces en compétition, il est utile de raisonner en temps caractéristique (Padmanabhan, 1993). Il existe en fait trois échelles de temps : celle liée à l'expansion de l'univers qui tend à diluer la matière et donc à empêcher l'accrétion, celle du réajustement de la pression, qui tend elle aussi à dissiper la matière et celle de chute libre, due à la gravitation qui tend à rapprocher les objets. Le phénomène ayant l'échelle de temps la plus courte est dominant et c'est lui qui sera responsable de l'évolution

des perturbations. Pour ce qui est des ordres de grandeur, on a les relations approchées suivantes :

$$t_{\text{pression}} \sim \frac{\text{longueur d'onde}}{\text{vitesse de dispersion}} \sim \frac{\lambda}{v}, \quad (2.42)$$

$$t_{\text{chute libre}} \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \quad (2.43)$$

et enfin

$$t_{\text{expansion}} \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho_{\text{espèce dominante}}}}. \quad (2.44)$$

Dans le cas d'un fluide à plusieurs composantes, le terme de vitesse de l'Eq. 2.42 est égal à la dispersion des vitesses de la composante perturbée et le terme de densité de l'Eq. 2.43 est celui de l'espèce responsable de l'effondrement gravitationnel. L'Eq. 2.44 caractérise l'effet de dilution dû à l'expansion de l'univers. Ce processus ne sera efficace que si l'espèce perturbée n'est pas l'espèce dominante (qui, elle, domine le taux d'expansion) et si l'espèce dominante est uniformément répartie. Par exemple, dans une période dominée par la radiation, l'échelle de temps t_R associée à l'expansion est $\rho_{\text{espèce dominante}} = \rho_R$ et donc $t_R < t_{\text{chute libre}}$: l'expansion est trop rapide pour qu'une région puisse se condenser. Dans le modèle standard, la matière noire se découple tôt dans l'histoire de l'univers, avant l'égalité matière-rayonnement. Tant que le rayonnement domine, les perturbations de la matière noire ne peuvent croître pour la raison que nous venons de voir. Par contre, dès l'égalité matière-rayonnement, plus rien ne les en empêche. Par conséquent, les premières perturbations pouvant s'effondrer sont de la taille de l'horizon au moment de l'égalité matière-rayonnement. Dès que l'effondrement commence, la taille physique de la perturbation ne change pas puisque qu'elle n'est plus liée à l'expansion globale de l'univers. Il est utile de l'exprimer en fonction de la taille de l'horizon au moment du découplage en refaisant un calcul analogue à celui de la page 55 ; on trouve :

$$\frac{d_{\text{Horizon}}(\text{découplage})}{d_{\text{Horizon}}(\text{égalité matière-rayonnement})} = \frac{1 + z_{\text{eq}}}{(1 + z_{\text{dec}})^{3/2}} (2\sqrt{1 + z_{\text{eq}}} - \sqrt{1 + z_{\text{dec}}}) \sim 50.$$

Ce qui signifie que la taille des perturbations de matière noire en effondrement depuis l'égalité matière-rayonnement et présentes sur la surface de dernière diffusion est 50 fois plus petite que la taille de l'horizon au moment du découplage. L'amplitude de ces perturbations au moment du découplage est de 10^{-3} .

Quant aux perturbations de la matière baryonique, elles peuvent croître seulement à partir du découplage des photons car le couplage fort photons/baryons empêchait cette croissance. Ainsi, la matière noire a eu plus de temps pour s'effondrer. Nous avons vu que pendant la domination de la matière, l'amplitude des perturbations grandissait comme a (voir l'Eq. 2.42) ; l'amplitude des perturbations de matière noire sont donc plus grandes que celles de matière baryonique d'un facteur :

$$\frac{a_{\text{dec}}}{a_{\text{eq}}} = \frac{T_{\text{eq}}}{T_{\text{dec}}} = \frac{z_{\text{eq}}}{z_{\text{dec}}} \sim 20 \Omega_0^{\text{NR}} h^2.$$

Les observations sont compatibles aujourd'hui avec une amplitude des perturbations de matière baryonique de l'ordre de 1 *sur des échelles de l'ordre de 1 Mpc* (correspond aux amas de galaxies). À l'époque de l'émission du CMB, cette amplitude était donc d'environ 10^{-3} (puisque $z_{\text{dec}} \sim 1000$), ceci en supposant bien entendu que l'univers est dominé par la matière depuis l'égalité matière-rayonnement. Le problème est que l'amplitude observée est de 10^{-5} (COBE). L'explication est la suivante : les photons sont couplés aux

baryons qui ont des fluctuations d'amplitude de l'ordre de 10^{-5} . Après le découplage les baryons peuvent s'effondrer car ils ne sont plus dispersés par les photons : ils tombent alors dans les puits de potentiel gravitationnel de la matière noire d'amplitude 10^{-3} et, très rapidement, vont aussi fluctuer avec cette amplitude, permettant de rendre compte des observations actuelles. De leur côté, les photons quittent les puits de potentiel des baryons avec lesquels ils étaient couplés, ils sont décalés vers le rouge d'une quantité compatible avec une amplitude de 10^{-5} (c'est l'amplitude des puits de potentiel des baryons lorsqu'ils étaient couplés avec les photons, voir la Fig. 2.12). Les photons ne ressentent pas les puits de potentiel de la matière noire car leur taille est tellement petite (50 fois plus petite que l'horizon au moment du découplage) que l'effet moyen est nul et ne concerne de toutes façons que les échelles angulaires de l'ordre de 0.02° . C'est pour cette raison que les fluctuations dans le rayonnement sont au niveau de 10^{-5} .

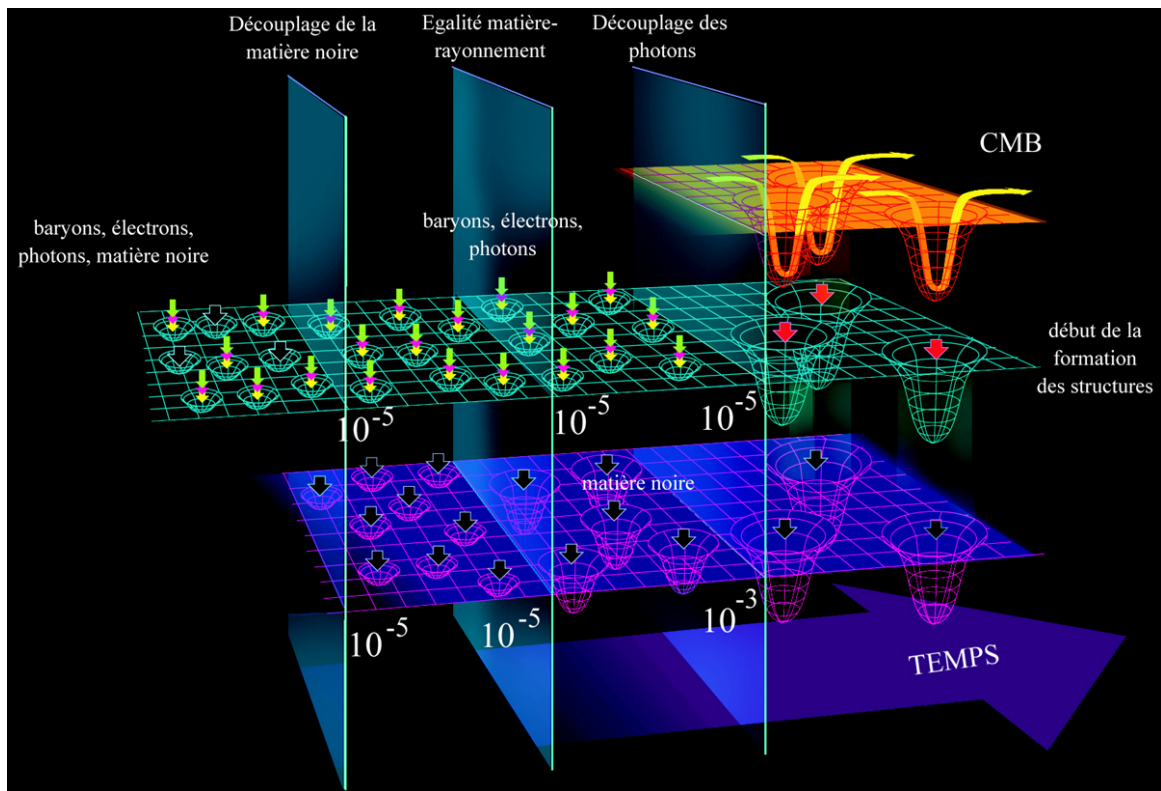


Fig. 2.12: Autour du découplage. À partir du découplage de la matière noire, les photons, baryons et électrons interagissent entre eux exclusivement. La pression de radiation des photons empêche les baryons de s'effondrer : il existe alors des oscillations acoustiques dans le fluide photon-baryon. Pendant ce temps, plus rien n'empêche la matière noire de s'effondrer depuis que la matière gouverne l'expansion de l'univers (voir le texte) et l'amplitude des fluctuations de densité de matière noire croît de 10^{-5} à 10^{-3} . Le découplage des photons libère les baryons : ceux-ci peuvent enfin s'effondrer et former des atomes avec les électrons. Rapidement, les baryons vont tomber dans les puits de potentiel gravitationnel creusés par la matière noire et l'amplitude de leurs fluctuations de densité va passer de 10^{-5} à 10^{-3} , amplitude suffisante pour rendre compte des structures actuellement observées. Les photons gardent en mémoire l'amplitude des fluctuations de la matière avec laquelle ils étaient couplés, soit 10^{-5} car leur passage dans les puits de profondeur 10^{-3} est totalement amorti par l'épaisseur de la surface de dernière diffusion. La figure, dessinée par Alain Meyer, est extraite de Revenu (1998).

Le modèle newtonien que nous avons exploité ici ne peut s'appliquer qu'à des perturbations dont la taille caractéristique est plus petite que l'horizon. Il nous a permis de dégager le comportement global des perturbations. Ces perturbations ne peuvent croître, et nous l'avons montré, qu'au cours d'une période de domination de la matière. La taille caractéristique d'une perturbation croît comme $a(t)$ tandis que l'horizon comme t . Des perturbations de plus en plus grandes vont donc entrer dans l'horizon au cours du temps. Si cette entrée se fait alors que l'univers est dans une période de domination du rayonnement, l'amplitude de la perturbation n'évolue plus (elle est gelée) et garde la valeur qu'elle avait lors de la traversée de l'horizon. Son évolution se poursuivra plus tard, quand la matière dominera. Pour étudier l'évolution détaillée des perturbations (y compris celles qui sont plus grandes que l'horizon et sans négliger la pression), on a besoin de la théorie des perturbations en relativité générale.

2.4.5 Approche relativiste

Pour simplifier les calculs, on se place dans un univers plat, $\kappa = 0$. Cette simplification est légitime puisque nous étudions des époques suffisamment reculées ($z \sim 1000$) pour considérer que l'univers était en effet très proche de la platitude (voir page 53). On utilisera aussi le temps conforme τ défini par : $d\tau = dt/a(t)$. Un univers parfaitement homogène et isotrope est caractérisé par la métrique usuelle :

$$ds^2 = a^2(\tau) (d\tau^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j)$$

où $x = (\tau, \vec{x})$ et γ_{ij} est la matrice identité à trois dimensions (car on est dans un univers plat). Nous cherchons à décrire l'évolution de perturbations. Les fluctuations quantiques du champ scalaire responsable de l'inflation se traduisent par des fluctuations dans la métrique. De la façon la plus générale possible (10 degrés de liberté au total), cette nouvelle métrique perturbée s'écrit :

$$ds^2 = a^2(\tau) ((1 + 2\psi)d\tau^2 - w_i d\tau dx^i - ((1 - 2\phi)\gamma_{ij} + 2h_{ij}) dx^i dx^j). \quad (2.45)$$

$\psi(\vec{x})$, $\phi(\vec{x})$ sont des champs scalaires, $w_i(\vec{x})$ est un champ vectoriel et $h_{ij}(\vec{x})$ est un champ tensoriel, avec \vec{x} étant un 3-vecteur (les indices latins vont de 1 à 3 tandis que les indices grecs vont de 0 à 3). On impose également que $\gamma_{ij} h^{ij} = \gamma^{ij} h_{ij} = 0$, puisque ϕ est dégénéré avec la trace de h_{ij} ; nous avons donc 10 degrés de liberté : 1 pour ψ , 1 pour ϕ , 3 pour w_i et 5 pour h_{ij} . Les fluctuations de la métrique peuvent être séparées selon leur nature géométrique : scalaire, vectorielle ou tensorielle. Les champs scalaires ψ et ϕ sont déjà réduits au maximum, ils contribuent pleinement à la partie scalaire des perturbations. Quant au champ vectoriel w_i , comme nous l'avons vu dans l'approximation newtonienne, il peut se décomposer en une partie scalaire et une partie vectorielle (gradient d'une fonction scalaire et rotationnel d'une fonction vectorielle respectivement, voir les Eqs. 2.39 et 2.40). Enfin, le tenseur h_{ij} se décompose de la même manière en :

$$h_{ij} = h_{ij\parallel} + h_{ij\perp} + h_{ijT} \quad \text{avec} \quad \partial_i h_{ijT} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_i \partial_i h_{ijT} = 0,$$

où $h_{ij\parallel}$ représente la partie scalaire, $h_{ij\perp}$ la partie vectorielle et enfin h_{ijT} la partie tensorielle⁵. Pour résoudre les équations du champ, on doit choisir un système de coordonnées

⁵ On montre plus précisément qu'il existe h (scalaire) et h_i (vectorielle) telles que $h_{ij\parallel} = (\partial_i \partial_j - (1/3)\gamma_{ij} \nabla^2)h$ et $h_{ij\perp} = h_{i,j} + h_{j,i}$. La partie purement tensorielle étant $h_{ij} - h_{ij\parallel} - h_{ij\perp}$.

particulier, c'est-à-dire choisir une jauge. La métrique perturbée a 10 composantes, les équations du champ ne nous donnent que 6 équations, fixer la jauge revient donc à fixer les 4 degrés de liberté restant. On peut citer par exemple deux jauges (systèmes de coordonnées) couramment employées :

$$\begin{aligned}\psi &= w_i = 0 && \text{jauge synchrone} \\ w_{i,j} &= h_{ij,j} = 0 && \text{jauge de Poisson.}\end{aligned}\quad (2.46)$$

Nous fixerons une jauge le moment venu. Pour l'instant, nous allons dériver les équations du champ et exprimer la conservation du tenseur énergie-impulsion donné par $T_{\alpha\beta} = (p + \rho)u_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta}$, le tout à l'ordre 1 en ψ , ϕ , w et h . u^α est la 4-vitesse du fluide, définie par $u^\alpha = dx^\alpha/ds$. La première quantité dont nous avons besoin est l'expression des coefficients du tenseur métrique $g^{\alpha\beta}$ que nous calculons facilement au premier ordre à partir des $g_{\alpha\beta}$ par la relation $g_{\alpha\beta} g^{\beta\lambda} = \delta_\alpha^\lambda$:

$$\begin{aligned}g^{00} &= \frac{1}{a^2}(1 - 2\psi) \\ g^{0i} &= -\frac{1}{a^2}w^i \\ g^{ij} &= -\frac{1}{a^2}((1 + 2\phi)\gamma^{ij} - 2h^{ij}).\end{aligned}$$

Nous sommes en mesure de calculer les composantes contra-variantes et covariantes de u :

$$\begin{aligned}u^0 &= \frac{d\tau}{ds} = \frac{1 - \psi}{a} \quad \text{et} \quad u_0 = (1 + \psi)a \\ u^i &= \frac{dx^i}{ds} = u^0 v^i = \frac{v^i}{a} \quad \text{et} \quad u_i = -a(w_i + v_i)\end{aligned}$$

où v^i est la vitesse propre du fluide, un infiniment petit du premier ordre.

Les coefficients de Christoffel définis par l'Eq. 1.5 (page 10) nous permettent de déterminer les équations que nous recherchons. Ces coefficients sont, à l'ordre 1 (la dérivée “ \cdot ” est la dérivée par rapport à τ) :

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{a}}{a} + \dot{\psi} \quad (2.47)$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \dot{\psi}_{,i} + \frac{\dot{a}}{a}w_i \quad (2.48)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}) + \frac{\dot{a}}{a}[(1 - 2\phi)\gamma_{ij} + 2h_{ij}] + \dot{h}_{ij} - (\dot{\phi} + 2\frac{\dot{a}}{a}\psi)\gamma_{ij} \quad (2.49)$$

$$\Gamma_{00}^i = \frac{\dot{a}}{a}w^i + \dot{w}^i + \psi^{,i} \quad (2.50)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2}(w^i_{,j} - w_{j,}^i) - \dot{\phi}\delta_j^i + \dot{h}_j^i + \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i \quad (2.51)$$

$$\Gamma_{jk}^i = (h_{j,k}^i + h_{k,j}^i - h_{jk}^{,i}) - \frac{\dot{a}}{a}w^i\gamma_{jk} - (\phi_{,k}\delta_j^i + \phi_{,j}\delta_k^i - \phi^{,i}\gamma_{jk}). \quad (2.52)$$

Il ne nous manque plus que les expressions des composantes du tenseur énergie-impulsion pour pouvoir écrire son équation de conservation. Ces composantes sont :

$$\begin{aligned}T_0^0 &= \rho = \rho_b + \delta\rho \\ T_0^i &= (\rho_b + p_b)v^i \\ T_i^0 &= -(p + \rho)(w_i + v_i) \\ T_j^i &= -p\delta_j^i = -(p_b + \delta p)\delta_j^i.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour expliciter l'équation de conservation $T^{\beta}_{\alpha;\beta} = 0$, en utilisant $T^{\beta}_{\alpha;\beta} = T^{\beta}_{\alpha,\beta} + \Gamma^{\beta}_{\delta\beta} T^{\delta}_{\alpha} - \Gamma^{\delta}_{\alpha\beta} T^{\beta}_{\delta}$. On trouve :

$$\dot{\rho} + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} - \dot{\phi} \right) (\rho + p) + \partial_i ((\rho + p) v^i) = 0 \quad (2.53)$$

$$\partial_{\tau} ((p + \rho)(w_i + v_i)) + 4 \frac{\dot{a}}{a} (p + \rho)(w_i + v_i) + \partial_i p + (p + \rho) \psi_{,i} = 0. \quad (2.54)$$

La première de ces deux équations, écrite à l'ordre 0 donne :

$$\dot{\rho}_b + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho_b + p_b) = 0$$

qui correspond à l'équation newtonienne dans le cas d'une pression nulle. Si l'on pose $p = \rho/3$ (radiation, résultat purement relativiste, que l'on ne peut pas retrouver en physique newtonienne), on retrouve $\rho_{\text{rad}} \propto a^{-4}$. On peut réécrire les Eqs. 2.53 et 2.54 en fonction des variables $x = p_b/\rho_b$ et la vitesse du son c_s ($c_s^2 = \delta p/\delta \rho$) pour obtenir :

$$\dot{\delta} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \delta (c_s^2 - x) + (1 + x)(\partial_i v^i - 3\dot{\phi}) = 0 \quad (2.55)$$

$$\frac{1}{a^4} \partial_{\tau} (a^4 \rho_b (1 + x)(w_i + v_i)) + c_s^2 \rho_b \partial_i \delta + \rho_b (1 + x) \psi_{,i} = 0. \quad (2.56)$$

Pour ce qui est des équations du champ, on est obligé de se définir un système de coordonnées, c'est-à-dire une jauge. Nous allons utiliser celle de Poisson, qui fixe les 4 derniers degrés de liberté, voir l'Eq. 2.46. L'équation d'Einstein peut être écrite sous la forme :

$$R^{\alpha}_{\beta} = 8\pi G \left(T^{\alpha}_{\beta} - \frac{1}{2} \delta^{\alpha}_{\beta} T \right), \quad (2.57)$$

où T est la trace du tenseur énergie-impulsion. Le calcul long auquel on ne peut échapper est celui du tenseur de courbure R^{α}_{β} . Pour cela, on utilise l'expression :

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta,\rho} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\rho,\beta} + \Gamma^{\rho}_{\gamma\rho} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\rho}_{\beta\gamma} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\rho} \quad (2.58)$$

et on passe à R^{α}_{β} grâce au tenseur métrique via $R^{\alpha}_{\beta} = g^{\alpha\lambda} R_{\lambda\beta}$. Voici les expressions, jusqu'à l'ordre 1, des composantes du tenseur de courbure :

$$\begin{aligned} R_{00} &= \Delta\psi + 3\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\dot{\psi} + \dot{\phi}) - 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) \\ R_{0i} &= \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) w_i - \frac{1}{2} \Delta w_i + 2\dot{\phi}_{,i} + 2\frac{\dot{a}}{a} \psi_{,i} \\ R_{ij} &= -\frac{1}{2} (\dot{w}_{i,j} + \dot{w}_{j,i}) + 2\frac{\dot{a}}{a} \dot{h}_{ij} + \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) \gamma_{ij} - 2\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) (\phi + \psi) \gamma_{ij} \\ &\quad + 2\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) h_{ij} + \ddot{h}_{ij} - \ddot{\phi} \gamma_{ij} - \frac{\ddot{a}}{a} (\dot{\psi} + 5\dot{\phi}) \gamma_{ij} - \Delta h_{ij} + (\phi - \psi)_{,ij} \\ &\quad + \Delta\phi \gamma_{ij} - \frac{\dot{a}}{a} (w_{i,j} + w_{j,i}). \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à injecter ces équations dans l'équation du champ 2.57 pour obtenir :

$$\Delta\psi + 3\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\dot{\psi} + \dot{\phi}) + 6\psi \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = 4\pi G a^2 \rho_b (1 + 3c_s^2) \delta$$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{-\frac{1}{2}\Delta w_i}_{\text{vecteur } \perp} + \underbrace{2\dot{\phi}_{,i} + 2\frac{\dot{a}}{a}\psi_{,i}}_{\text{vecteur } \parallel} = -8\pi G\rho_b a^2(1+x) \times \underbrace{(w_i + v_i)}_{w_i \perp, v_i \parallel \text{ et } \perp} \\
& \ddot{\phi} - \Delta\phi - \frac{1}{3}\Delta(\phi - \psi) + \frac{\dot{a}}{a}(\dot{\psi} + 5\dot{\phi}) + 2\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\psi = -4\pi G\rho_b a^2(1 - c_s^2)\delta \\
& \underbrace{-\frac{1}{2}(\dot{w}^i_{,j} + \dot{w}_j{}^{,i}) - \frac{\dot{a}}{a}(w^i_{,j} + w_j{}^{,i})}_{\text{vecteur}} + \underbrace{\ddot{h}^i_j - \Delta h^i_j + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}^i_j}_{\text{tenseur}} + \underbrace{(\phi - \psi)^{,i}{}_{,j}}_{\text{scalaire}} = 0 \quad (2.59)
\end{aligned}$$

Compte-tenu des propriétés géométriques des ϕ , ψ , w_i et h_{ij} , on peut séparer ces équations en parties scalaires, vectorielles et tensorielles :

$$\Delta\psi + 3\left(\ddot{\phi} + \frac{\dot{a}}{a}(\dot{\phi} + \dot{\psi})\right) - 6\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a}\right)\psi = 4\pi G a^2 \rho_b(1 + 3c_s^2)\delta \quad (2.60)$$

$$\Delta w_i = 16\pi G a^2 \rho_b(1 + x)(w_i + v_i)_\perp \quad (2.61)$$

$$\dot{\phi}_{,i} + \frac{\dot{a}}{a}\psi_{,i} = -4\pi G a^2 \rho_b(1 + x)v_{i\parallel} \quad (2.62)$$

$$\ddot{\phi} - \Delta\phi - \frac{1}{3}\Delta(\phi - \psi) + \frac{\dot{a}}{a}(5\dot{\phi} + \dot{\psi}) + 2\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\psi = -4\pi G a^2 \rho_b(1 - c_s^2)\delta \quad (2.63)$$

$$(\phi - \psi)_{,ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\Delta(\phi - \psi) = 0 \quad (i \neq j) \quad (2.64)$$

$$\left(\partial_\tau + 2\frac{\dot{a}}{a}\right)(w_{i,j} + w_{j,i}) = 0 \quad (2.65)$$

$$\left(\partial_\tau^2 - \nabla^2 + 2\frac{\dot{a}}{a}\partial_\tau\right)h_{ij} = 0 \quad (2.66)$$

Au cours de ces calculs, on a vérifié que l'on retrouvait bien les équations de Friedmann (en temps conforme) à l'ordre 0 ; elles s'écrivent :

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3}\rho_b a^2 \quad (2.67)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(-\rho_b + 3p_b)a^2. \quad (2.68)$$

L'Eq. 2.64 nous indique que $\psi = \phi$. Nous voyons que ces équations ne sont plus couplées, les composantes scalaires, vectorielles et tensorielles évoluent indépendamment. L'Eq. 2.66 représente l'évolution des perturbations tensorielles, qui s'identifient complètement avec les ondes gravitationnelles primordiales. Le terme en \dot{a}/a représente l'amortissement dû à l'expansion. Nous constatons, d'après l'Eq. 2.65, que le mode vectoriel w_i décroît au cours de l'expansion à cause du même terme de frottement. Nous avons déjà obtenu ce résultat dans l'approximation newtonienne. On peut réduire les Eqs. 2.60 et 2.63 pour trouver celle régissant l'évolution du potentiel ψ :

$$\Delta\psi - 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a}\psi\right) = 4\pi G a^2 \rho_b \delta. \quad (2.69)$$

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier le comportement d'un fluide relativiste (par exemple le fluide photon-baryon au moment du découplage) à l'intérieur et à l'extérieur de l'horizon. Pour cela nous allons avoir besoin des trois équations 2.55, 2.56 et 2.69.

Hors de l'horizon

Les modes hors de l'horizon ont une longueur d'onde plus grande que le temps conforme (en unité $c = 1$) : $\lambda > \tau$. On peut négliger les gradients dans l'espace par rapport aux dérivées temporelles puisque $1/\delta x < 1/\delta \tau$. Cela signifie que les grandeurs que nous regardons varient surtout en temps et moins en espace. Sous ces hypothèses, nos trois équations de base deviennent :

$$\begin{aligned}\dot{\delta} + 3(c_s^2 - x)\frac{\dot{a}}{a}\delta - 3(1+x)\dot{\psi} &= 0 \\ \partial_\tau (a^4 \rho_b (1+x)\vec{v}) &= 0 \quad (\text{ordre } 0) \\ \dot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a}\psi &= -\frac{1}{2}\frac{\dot{a}}{a}\delta\end{aligned}$$

Pour trouver la dernière équation, on a utilisé la première équation de Friedmann en temps conforme (voir Eq. 2.67). La deuxième équation montre que la vitesse propre décroît en $1/a$ dans l'époque matérielle (résultat que nous avons déjà rencontré page 29, Eq. 1.41) et reste constante pendant l'époque radiative. À partir des première et troisième nouvelles équations de base, on peut en déduire une sur ψ :

$$\ddot{\psi} + 3(1 + c_s^2)\frac{\dot{a}}{a}\dot{\psi} + 3(c_s^2 - x)\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \psi = 0.$$

Comme x est toujours inférieur ou égal à c_s^2 , cette équation n'admet pas de mode croissant (solution constante pour $x = c_s^2$ pendant les périodes de domination de la matière ou du rayonnement). Le cas $x = -1$, $c_s^2 = -1$ de l'inflation mène aussi à une solution constante. Les variables δ et ψ restent donc constantes hors de l'horizon pendant les périodes de domination du vide, du rayonnement et de la matière. Elles décroissent au cours des transitions entre ces régimes.

À l'intérieur de l'horizon

On regarde maintenant des perturbations dont l'échelle λ est plus petite que l'horizon. L'équation de Friedmann en temps conforme nous indique que $a^2 \rho_b \sim 1/\tau^2$. L'Eq. 2.62 nous donne $\dot{\psi} + (\dot{a}/a)\psi \sim \lambda/\tau^2$ (considérer pour cela un mode de Fourier pur) et nous pouvons donc négliger le deuxième terme du membre de gauche de l'Eq. 2.69. Ce qui nous redonne l'équation de Poisson de l'approximation newtonienne :

$$\Delta\psi = 4\pi G a^2 \rho_b \delta.$$

De même, dans l'Eq. 2.55, le terme $\partial_i v^i$ est dominant devant $\dot{\phi}$, ce qui donne :

$$\dot{\delta} + (1+x)\nabla \cdot \vec{v} + 3(c_s^2 - x)\frac{\dot{a}}{a}\delta = 0. \quad (2.70)$$

On retrouve l'équation habituelle du cas newtonien en posant $x = c_s^2 = 0$ (à comparer avec l'Eq. 2.35, au temps conforme près). Enfin, l'équivalent de l'Eq. 2.36 s'écrit, en faisant les mêmes approximations dans l'Eq. 2.56 :

$$\ddot{\vec{v}} + (1-3x)\frac{\dot{a}}{a}\vec{v} = -\frac{c_s^2}{1+x}\nabla\delta - \nabla\psi, \quad (2.71)$$

où l'on a utilisé

$$\frac{\dot{\rho}_b}{\rho_b} = -3\frac{\dot{a}}{a}(1+x).$$

On retrouve l'équation newtonienne en mettant la pression à 0 : $x = 0$ et $c_s^2 = 0$. Les Eqs. 2.70 et 2.71 montrent qu'il existe donc des oscillations acoustiques couplées à des gradients de vitesse. Nous avons travaillé ici dans un contexte simplifié dans lequel nous n'avons considéré qu'un fluide unique. Un calcul détaillé nécessiterait de prendre en compte les différentes espèces de particules en présence, essentiellement photons, baryons et matière noire. Cependant, notre approche suffit à comprendre comment les perturbations évoluent à l'intérieur de l'horizon. Les fluctuations de densité sont couplées à des gradients de vitesse ; ce couplage se traduit par des **oscillations acoustiques**. Le point essentiel est qu'il est possible d'observer ces oscillations acoustiques à travers le CMB. En effet, les photons sont couplés aux baryons et aux électrons. Les perturbations de densité se traduisent sur les photons par une perte ou un gain d'énergie (selon qu'ils sortent d'un puits de potentiel ou qu'ils descendent d'une vallée de potentiel), tandis que la vitesse du fluide induit un effet Doppler sur les photons. Ainsi, à l'intérieur de l'horizon, les photons sont perturbés par ces deux composantes (potentiel gravitationnel et vitesses) : nous observons ces perturbations dans le CMB, elles sont responsables des pics Doppler.

2.5 Les anisotropies du CMB

Nous avons dérivé dans la section précédente le comportement des perturbations dans la métrique perturbée. Le CMB est un rayonnement alors que les perturbations sont intrinsèques à l'espace-temps. De quelle manière les fluctuations du rayonnement fossiles sont-elles couplées aux fluctuations de la métrique ? Autrement dit, comment l'information contenue dans les fluctuations s'est-elle transmise aux photons ?

2.5.1 Anisotropies et échelles angulaires

À l'époque de l'émission du CMB, l'univers est essentiellement rempli de photons, baryons et électrons. Ces espèces sont liées entre elles par l'interaction électromagnétique. Dans la limite de couplage fort, on peut décrire l'univers comme étant rempli par un fluide unique : le libre parcours moyen des particules est très faible. Cette description est valable jusqu'à la recombinaison (voir page 36). Le découplage des photons se fait plus tard que la recombinaison. L'approximation de couplage fort consiste à dire que la recombinaison et le découplage des photons sont un seul et même événement. La surface de dernière diffusion est donc infiniment fine dans ce modèle. La diffusion ne joue un rôle que sur des échelles plus petites que l'horizon, pour des raisons de causalité. À ces échelles, on s'attend à observer les effets de la physique causale, qui sont ici des oscillations acoustiques, comme nous l'avons vu dans la section précédente. Les anisotropies que nous observons dans le CMB (voir Fig. 2.13) sur des échelles plus grandes que l'horizon — que nous voyons sous un angle de l'ordre du degré — reflètent les perturbations initiales des photons et les effets gravitationnels, c'est l'effet Sachs-Wolfe (1967). Dans la section sur l'inflation, nous avons vu que des régions séparées de plus de 1° n'étaient pas causalement connectées (voir page 56). Cela signifie que la physique responsable des anisotropies à des échelles de plus de 1° n'est pas de la physique causale. Elles sont essentiellement dues aux fluctuations dans le potentiel gravitationnel, présentes à toutes les échelles. Les

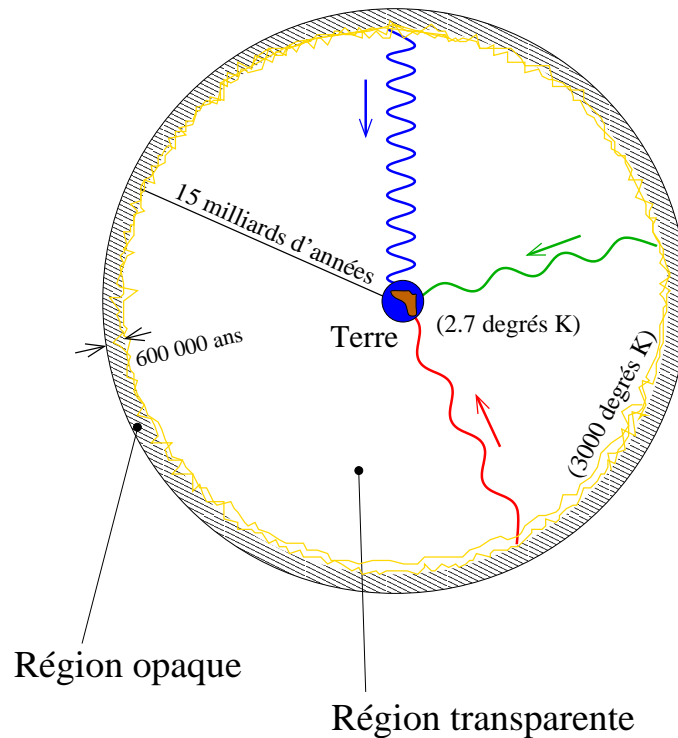


Fig. 2.13: Illustration de ce que nous observons aujourd'hui. La dernière diffusion ayant eu lieu environ 600 000 ans après le *Big-Bang* et la vitesse de la lumière étant finie, nous observons le CMB sur la surface intérieure d'une sphère dont nous occupons le centre. Avant la dernière diffusion, le libre parcours moyen des photons était très faible et l'univers était opaque au rayonnement ; il devient transparent par la suite, lors de la recombinaison. Les photons issus de la surface de dernière diffusion proviennent de régions avec des potentiels gravitationnels différents, nous les observons avec des températures différentes, ce qui constitue les anisotropies du CMB.

photons, pour parvenir jusqu'à nous ont été redshiftés (s'ils provenaient d'une région où le potentiel gravitationnel était plus fort que la moyenne) ou blueshiftés (s'ils provenaient d'une région où le potentiel gravitationnel était plus faible). Ainsi, ils nous apparaîtront plus froids ou plus chauds que la moyenne. Une région sur-dense (sous-dense) nous apparaît comme un point froid (chaud). Le spectre de puissance du potentiel gravitationnel étant approximativement invariant d'échelle, on s'attend à trouver statistiquement les mêmes fluctuations de température à des échelles plus grandes que le degré.

Quant aux petites échelles angulaires, correspondant à des régions ayant eu le temps de rentrer en contact causal, les anisotropies sont dues d'une part à l'effet Sachs-Wolfe et d'autre part aux interactions entre les baryons, les électrons et les photons. L'inertie des baryons tend à les faire s'effondrer dans les puits de potentiel gravitationnel. Les photons engendrent une pression de radiation qui peut, partiellement, compenser l'effondrement des baryons. Il existe ainsi une compétition entre gravitation et pression de radiation, responsable des oscillations acoustiques. Formellement, l'équation gouvernant le comportement des ondes acoustiques dans l'espace de Fourier peut s'écrire (elle correspond à la limite de couplage fort des équations de transfert) :

$$(m_{\text{eff}} \Delta T_k)' + \frac{k^2}{3} \Delta T_k = -F_k,$$

où les dérivations se font par rapport au temps conforme ($d\tau = dt/a$) F_k est le terme dû

à la gravitation, m_{eff} décrit l'inertie du fluide (il dépend du rapport photons/baryons) : ρ_γ/ρ_b) et ΔT_k la perturbation de température. L'influence du paramètre cosmologique Ω_m apparaît explicitement ici (via le rapport $\Omega^R/\Omega^{\text{NR}}$). Cette équation est celle d'un oscillateur harmonique avec source, la gravitation. La source dépend de la dérivée du potentiel et de la courbure spatiale. Les anisotropies de température sont donc dues aux oscillations acoustiques (fluctuations du potentiel gravitationnel et fluctuations des vitesses). En effet, les photons diffusent pour la dernière fois sur des électrons animés de vitesses différentes, dans des directions différentes. Il en résulte un effet Doppler qui contribue également aux anisotropies. Bien que cet effet ne soit pas dominant, on appelle les pics dans le spectre de puissance du CMB, "pics Doppler" (voir Fig. 2.14). Le spectre de puissance aux grandes valeurs de ℓ est donc une somme des contributions de vitesse et de densité, ce qui élargit les pics. Ce phénomène n'a pas lieu pour les pics de polarisation, qui ne sont dus qu'aux gradients des vitesses sur la surface de dernière diffusion : les pics Doppler des spectres de polarisation sont plus fins.

Formellement, on décrit les anisotropies de température du CMB par leur spectre de puissance angulaire C_ℓ^T . Le multipôle ℓ est inversement proportionnel à l'échelle angulaire et l'horizon à l'époque de la dernière diffusion, vu sous 1° environ, correspond approximativement à $\ell = 180$. Le calcul du spectre de puissance se déduit de la décomposition de la carte des anisotropies sur les fonctions de base sur la sphère, les harmoniques sphériques :

$$\frac{\Delta T}{T} = \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}^T Y_\ell^m.$$

À partir d'une carte de fluctuations de température donnée, on peut calculer les $a_{\ell m}^T$ en utilisant l'orthogonalité des harmoniques sphériques :

$$a_{\ell m}^T = \int \frac{\Delta T}{T}(\vec{n}) Y_\ell^{m*}(\vec{n}) d\vec{n}.$$

Le spectre de puissance est relié aux coefficients du développement $a_{\ell m}^T$ (au même titre que la puissance dans un espace cartésien est reliée aux coefficients de la transformée de Fourier) par :

$$C_\ell^T = \langle |a_{\ell m}^T|^2 \rangle = \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell m}^T|^2.$$

La Fig. 2.16 montre comment évoluent ces spectres avec les paramètres cosmologiques.

Il existe donc une échelle critique dans ce que nous observons : c'est l'angle sous lequel nous voyons sur le ciel l'horizon tel qu'il était à l'époque de la dernière diffusion. Schématiquement, le spectre de puissance que nous venons de définir présentera deux caractéristiques essentielles : une contribution uniforme à la puissance pour des échelles angulaires supérieures au degré et des pics, dus aux oscillations acoustiques, à des échelles plus petites que le degré. Les contraintes et estimations sur les paramètres cosmologiques se font en étudiant par exemple l'amplitude des pics ainsi que leur espacement absolu et relatif. Plus une expérience sera capable de voir de pics, plus elle sera en mesure de fournir des contraintes fortes sur les paramètres cosmologiques. Pour cela, on doit être capables de voir des structures de plus en plus petites, de façon à atteindre des multipôles ℓ de plus en plus grands (se rappeler que ℓ est inversement proportionnel à θ , la taille angulaire de la structure). C'est pour cette raison que les expériences CMB ont des résolutions angulaires de plus en plus petites ; il est courant aujourd'hui d'atteindre la dizaine de minute d'arc.

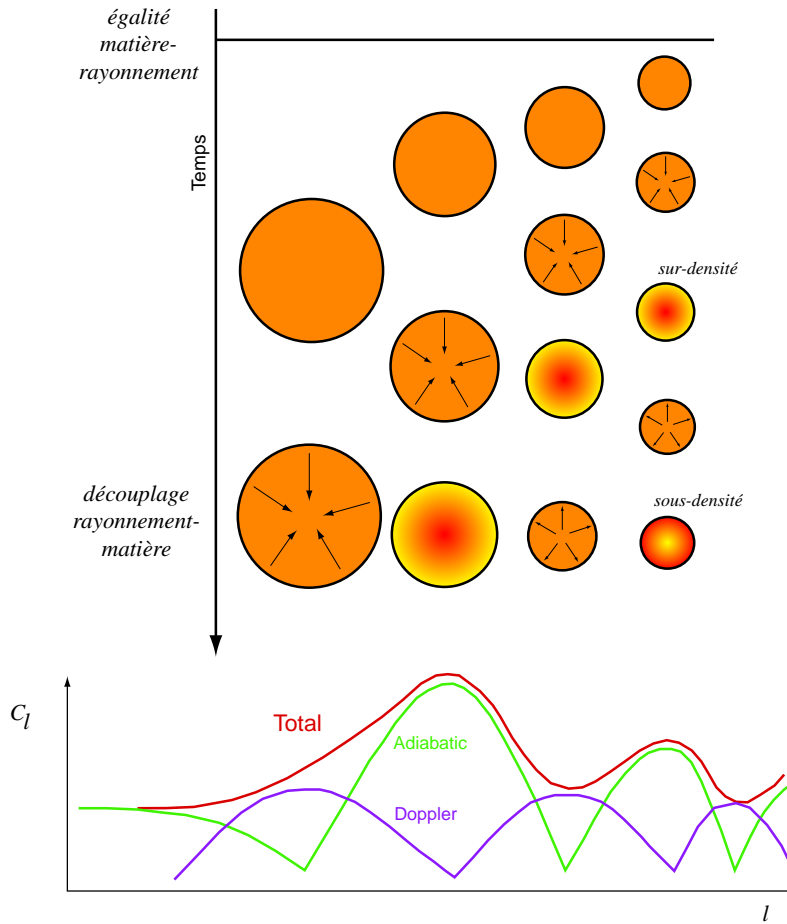


Fig. 2.14: Oscillations acoustiques et pics Doppler. Sur le schéma du haut, le temps s'écoule de haut en bas. Avec le cours du temps, des perturbations de plus en plus grandes entrent dans l'horizon, voir Fig. 2.10 page 58. Celles qui entrent le plus tôt, les plus petites dans la colonne de droite, ont le temps d'osciller plusieurs fois avant le découplage, contrairement aux plus grandes. Les flèches indiquent le mouvement d'ensemble du fluide dans la perturbation, symbolisant les oscillations. Le graphe du bas est une projection des contributions de température (courbe "adiabatic") et de vitesses (courbe "Doppler"). En ordonnée est représentée l'amplitude de la fluctuation de température (c'est le spectre de puissance, habituellement noté C_ℓ^T) et en abscisse c'est le multipôle ℓ , inversement proportionnel à l'échelle angulaire. Ces deux contributions sont déphasées de 90° : quand le fluide est immobile, la compression est maximale (sur-densité) ou minimale (sous-densité) ; quand le fluide a sa vitesse maximale, la pression est nulle, analogue à l'échange entre énergie cinétique et potentielle d'un oscillateur harmonique. La somme des deux contributions fait apparaître les pics Doppler. Le graphe est adapté de Lineweaver (1997).

2.5.2 Anisotropies et paramètres cosmologiques

Géométrie

Ici, nous nous intéressons à l'observation en elle-même du CMB. Nous détectons les photons environ 15 milliards d'années après leur émission. Nous supposons qu'entre leur émission et leur réception, aucun processus n'a pu les modifier d'une façon importante, ce qui est très proche de la réalité.

Toutefois, pour ce qui est de ce dernier point, on s'attend à ce que l'univers ait été à nouveau ionisé, après la recombinaison (Gunn et Peterson, 1965), c'est ce que l'on appelle la *réionisation*. Si une telle phase s'est effectivement produite, les électrons se sont dissociés des noyaux et les photons (ceux du CMB notamment) purent dès lors diffuser de nouveau sur les électrons libres : les fluctuations de température créées lors de leur découplage sont donc modifiées et la période de réionisation peut être contrainte en étudiant les spectres de puissance de température et de polarisation du CMB (Griffiths et al., 1998; Haiman et Knox, 1999). On pense que cette réionisation s'est produite à des redshifts compris entre 40 et 5 et est principalement due aux photons émis par les premières générations d'étoiles ou par des mini-quasars.

On appelle anisotropies “primordiales” celles dues à la recombinaison et “secondaires”, celles dues à des processus ultérieurs à la recombinaison. Seules les premières sont importantes quant à la détermination des paramètres cosmologiques. Pour une revue exhaustive des effets menant au spectre de puissance, voir la thèse de Hu (1995).

L'observation des anisotropies consiste à étudier, nous l'avons vu, leur répartition en fonction de l'échelle angulaire. Les classer en fonction de leur échelle angulaire (c'est une quantité **apparente**) ne nous donne qu'une information **relative**. Pour retrouver leurs propriétés géométriques absolues, on a besoin de connaître certains paramètres cosmologiques : la constante de Hubble et $\Omega_m + \Omega_\Lambda$.

Pour ce qui est de la constante de Hubble, on comprend facilement son influence : considérons une fluctuation sur la surface de dernière diffusion de dimensions physiques données. Selon la distance qui nous sépare d'elle, nous la verrons sous un angle différent. Une constante de Hubble h petite correspond à une distance plus faible et la fluctuation est vue sous un angle plus grand, et réciproquement. La géométrie globale de l'univers, donnée par $\Omega_m + \Omega_\Lambda$ (voir page 19) aura un effet très sensible : s'il est ouvert, les photons, suivant leur géodésique, seront vus sous un angle beaucoup plus petit que dans le cas d'un univers plat, et encore plus pour un univers fermé, voir la Fig. 2.15. La Fig. 2.16(c) montre la dépendance du spectre de puissance avec Ω_κ . Ce paramètre varie de 0 (univers plat) à 0.9 (univers “très” ouvert), ce qui a pour effet de déplacer les pics Doppler vers les grandes valeurs de ℓ , c'est-à-dire vers les petites échelles angulaires. De même, la Fig. 2.16(d) montre qu'un univers avec constante cosmologique à égalité matière-rayonnement et rapport photon-baryon fixés déplace les pics légèrement vers les grandes échelles angulaires. Cela est dû au fait qu'en présence de constante cosmologique, la surface de dernière diffusion doit être à une distance comobile plus petite, donc les perturbations sous-tendent un angle plus grand.

Remarquons ici que puisque les contraintes obtenues avec les supernovæ de type Ia sur Ω_m et Ω_Λ ne concernent que leur différence, en ajoutant les contraintes provenant du CMB, on sera en mesure de lever la dégénérescence entre ces deux paramètres cosmologiques (voir par exemple Tegmark (1999)).

Physique

La dépendance des anisotropies en Ω est manifeste dans l'équation donnant l'évolution des fluctuations de température dans le cas des oscillations acoustiques, à travers le terme de masse effective m_{eff} . Par exemple, si l'on augmentait la densité baryonique $\Omega_b h^2$ sans modifier celle des photons (Fig. 2.16(a)), alors la pression diminuerait sur la surface

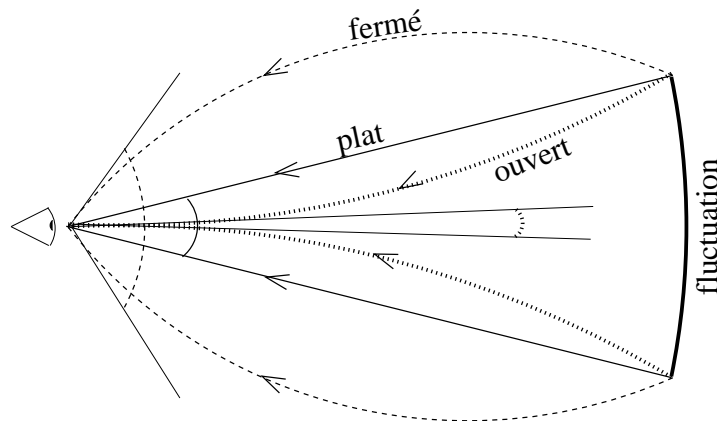


Fig. 2.15: **Effet de la géométrie de l'univers sur la taille angulaire d'une fluctuation.**

Une fluctuation donnée sur la surface de dernière diffusion sera vue sous un angle plus ou moins grand selon que l'univers soit fermé, plat ou ouvert. Cette géométrie dépend de la quantité $\Omega_m + \Omega_\Lambda$.

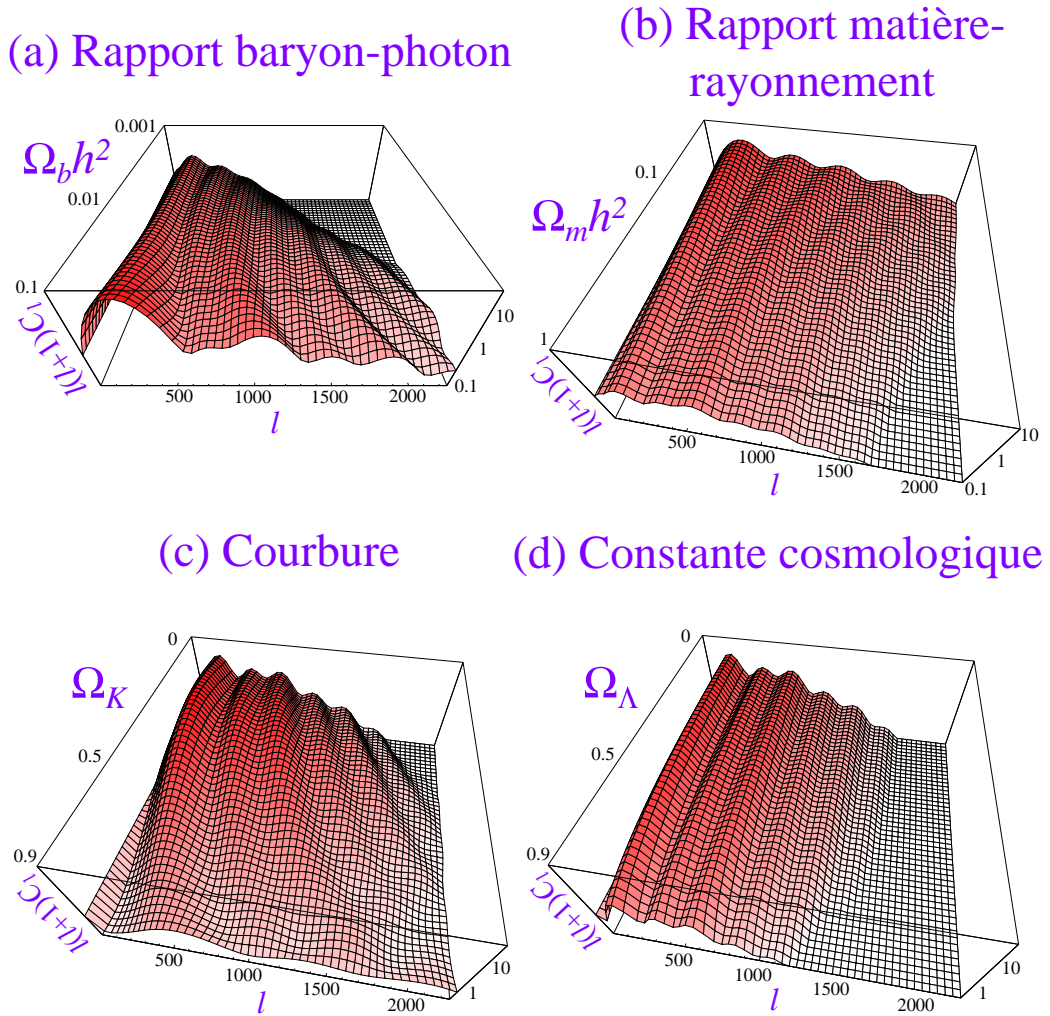
de dernière diffusion, ce qui a pour effet de diminuer la vitesse du son et de modifier l'emplacement et l'espacement des pics Doppler.

Augmenter la densité de matière (Fig. 2.16(b)) $\Omega_m h^2$ à densité de rayonnement fixée, avance le moment d'égalité matière-rayonnement (il se produit plus tôt), ce qui diminue la hauteur du premier pic Doppler.

Les anisotropies du CMB permettent également de mesurer certains paramètres essentiels de l'inflation : d'une part le rapport tenseur/scalaire r (voir page 64) et d'autre part l'indice spectral n . La polarisation du CMB sera sur ce point particulièrement importante puisque le champ B de polarisation (voir section suivante) est spécifique des ondes gravitationnelles primordiales. Si l'on mesure de la polarisation B , on aura la preuve directe de la présence de ces fluctuations tensorielles, indépendamment de tout modèle cosmologique. Il existe un moyen d'estimer la contribution des modes tenseurs avec la température ; il consiste à mesurer les fluctuations de température à grandes échelles angulaires et à comparer ces valeurs avec celles trouvées aux petites échelles angulaires.

2.5.3 Expériences CMB et fonctions fenêtres

Une expérience typique de CMB consiste à faire balayer à un instrument (par exemple un télescope dont le plan focal est équipé de bolomètres refroidis à quelques K avec de l'hélium) une portion du ciel bien choisie : loin du plan galactique pour minimiser les contributions astrophysiques autres que CMB. Le canal de fréquence du détecteur doit également être choisi de manière à minimiser la contribution atmosphérique pour les expériences au sol ou ballon. On peut également utiliser des détecteurs fonctionnant à des fréquences différentes afin de mieux soustraire les contributions parasites. Depuis 1992, pas moins de 24 expériences (au sol et ballons) ont cherché à mesurer le spectre de puissance des fluctuations de température du CMB. Aucune n'a été conçue pour sa polarisation. Cette lacune est essentiellement due au fait que la température est beaucoup plus facile à mesurer. Quelques expériences terrestres ont été prévues, notamment les ballons Archéops et Boomerang dans un futur proche. Quelques expériences au sol sont également prévues. Il est probable que ces expériences ne seront capables (et c'est déjà beaucoup) que de



adapté de W.Hu 2/98

Fig. 2.16: Spectres de puissance du CMB en fonction des paramètres cosmologiques.
 Pour chacune de ces figures, tous les paramètres cosmologiques sont fixés sauf celui que l'on fait varier...

donner des limites, ou au moins de bien mieux connaître les contributions autres que CMB à la polarisation totale mesurée. Il faudra sans doute attendre les expériences satellitaires MAP (en 2001) et surtout PLANCK (en 2007, beaucoup plus sensible que MAP) pour espérer mesurer la polarisation du CMB. La plupart des expériences terrestres ne couvrent que des surfaces réduites du ciel, soit pour des raisons indépendantes de la volonté des expérimentateurs : impossibilité d'emporter de grandes quantités d'hélium nécessaire au refroidissement des bolomètres, durée de vie limitée des ballons... soit parce qu'il peut être parfois préférable de favoriser une faible couverture du ciel au bénéfice d'un meilleur rapport signal sur bruit. Les détecteurs sont situés en aval d'un collimateur, des cornets par exemple ; ce sont eux qui donnent sa résolution angulaire à un instrument. Chaque expérience doit être capable de quantifier sa sensibilité aux échelles angulaires, à travers ce que l'on appelle les "fonctions fenêtres". Au même titre qu'un filtre passe-bande en électronique ne laisse passer qu'une certaine bande de fréquence, une fonction fenêtre ne laisse passer qu'une certaine bande de fréquence dans le domaine des échelles angulaires, c'est-à-dire les multipôles ℓ . COBE, par exemple, avec une résolution angulaire d'une dizaine de degrés n'était sensible qu'à des multipôles compris entre 2 et 20. Les fonctions

fenêtres d'une expérience interviennent dans la fonction d'autocorrélation des anisotropies mesurées :

$$\left\langle \frac{\Delta T}{T}(\vec{n}_1) \frac{\Delta T}{T}(\vec{n}_2) \right\rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=1}^{+\infty} (2\ell+1) C_\ell^T W_\ell(\cos \theta),$$

où $\vec{n}_{1,2}$ sont deux directions dans le ciel, θ l'angle séparant ces vecteurs, C_ℓ^T le spectre de puissance du CMB et W_ℓ les fonctions fenêtres ("Window function"). On suppose ici que le faisceau de l'instrument — c'est son diagramme d'antenne, spécifiant sa réponse directionnelle — a une forme symétrique (cas du faisceau gaussien par exemple, ce qui est souvent le cas), ce qui fait que les fonctions fenêtres ne dépendent que de l'angle entre les deux directions \vec{n}_1 et \vec{n}_2 . Pour une revue détaillée sur les fonctions fenêtres, lire White & Srednicki (1994).

2.5.4 Variance cosmique

Les perturbations scalaires et tensorielles engendrées par l'inflation sont gaussiennes. Comme les processus menant de ces perturbations aux fluctuations du CMB sont linéaires, les fluctuations du CMB sont aussi gaussiennes, de moyenne nulle par définition. Ainsi, les coefficients $a_{\ell m}^T$ sont issus d'une distribution gaussienne, de moyenne nulle et de variance C_ℓ^T . Pour chaque valeur de ℓ , on a $2\ell+1$ coefficients $a_{\ell m}^T$. Chaque variance C_ℓ^T est donc issue d'une distribution de χ^2 (car c'est une valeur moyenne de *carrés* de variables gaussiennes) dont la largeur vaut $C_\ell^T / \sqrt{2\ell+1}$. Cette largeur est beaucoup plus grande pour les petites valeurs de ℓ , correspondant aux grandes échelles angulaires. Cela peut se comprendre de la façon suivante : pour une grande échelle angulaire, il existe peu de portions de ciel *indépendantes* de cette taille ; l'estimation du C_ℓ^T correspondant est donc entachée d'une erreur qui diminue lorsque l'on considère des échelles de plus en plus petites. Il existe donc un domaine d'erreur en deçà duquel on ne peut descendre, c'est la variance cosmique. Pour une revue concernant la variance cosmique, voir par exemple Grishchuk & Martin (1997).

2.5.5 Principe du calcul complet

Le calcul complet consiste à exprimer les fluctuations de l'intensité des photons. Celle-ci est liée à leur densité d'énergie par (voir Chandrasekhar (1960)) :

$$i = \frac{c}{4\pi} \rho_\gamma$$

et ses fluctuations à celles de la densité par :

$$\frac{\delta i}{i} = \frac{\delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma} = \delta_\gamma.$$

Enfin, les fluctuations de température dues aux perturbations de densité sont données par :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{4} \delta_\gamma, \text{ car } \rho_\gamma \propto T^4.$$

L'évolution de ρ_γ est donnée par l'équation d'Einstein en mettant dans le tenseur énergie-impulsion la contribution des photons, en même temps que celles des autres espèces. La

méthode consiste à étudier la propagation des photons dans un univers perturbé. Ceux-ci sont décrits par leur fonction de distribution. Si nous nous restreignons à la propagation des photons *après* leur découplage, on peut supposer qu'ils se propagent librement (au premier ordre) dans l'univers selon des géodésiques et que leur fonction de distribution vérifie :

$$\frac{dp^\alpha}{d\lambda} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta p^\gamma = 0.$$

À cette équation de propagation, il faut ajouter l'équation de Liouville :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{dp^\mu}{dt} \frac{\partial f}{\partial p^\mu} = 0.$$

Si nous résolvons ces équations dans le cas d'un univers plat de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (ordre 0 dans les perturbations), nous trouverions que f garde la même forme au cours du temps, c'est-à-dire que les photons gardent une distribution de corps noir mais à une température différente :

$$T(t) = \frac{a(t_{\text{dec}})}{a(t)} T(t_{\text{dec}}).$$

Nous avons déjà obtenu ce résultat page 30. C'est ce spectre décalé en température que nous observons effectivement, à l'ordre 0 (c'est celui que FIRAS a mesuré). Pour regarder les effets des perturbations de la métrique, on fait les calculs avec tous les potentiels décrivant la métrique perturbée.

Nous avons présenté dans cette partie les anisotropies de température du CMB et décrit la physique de ces fluctuations. Leur mesure précise à des résolutions angulaires faibles (au moins inférieures au degré) permet de mesurer les paramètres cosmologiques. La température de ce rayonnement n'est cependant pas la seule source d'informations : sa polarisation est tout aussi riche mais elle est vraisemblablement beaucoup plus faible, et donc plus difficile à mesurer.

Nous allons étudier dans la suite cette polarisation : d'une part, nous présenterons les paramètres de Stokes, qui permettent de quantifier la polarisation d'une onde. Nous montrerons ensuite que le CMB doit être polarisé et que la figure de polarisation diffère selon qu'elle provienne de fluctuations scalaires ou tensorielles. Cette propriété est très importante car elle montre que seule la polarisation permet d'avoir accès directement aux ondes gravitationnelles primordiales.

2.6 La polarisation du CMB

2.6.1 Les paramètres de Stokes

Un rayonnement polarisé peut se décrire en utilisant les *paramètres de Stokes* (Chandrasekhar, 1960). Considérons une onde électromagnétique plane presque monochromatique⁶ se propageant sur (Oz) . Cette onde peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E_x &= a_x e^{i(\omega t - \varphi_x(t))} \\ E_y &= a_y e^{i(\omega t - \varphi_y(t))}. \end{aligned}$$

⁶ dont le contenu fréquentiel est étroitement regroupé autour de sa valeur moyenne ω .



Fig. 2.17: **Portrait de George Gabriel Stokes (1819-1903).** Stokes est surtout connu pour la loi hydrodynamique liée à la viscosité des fluides qui porte son nom.

L'onde est presque monochromatique si les amplitudes a_x et a_y et les phases φ_x et φ_y sont des fonctions qui ne changent que très peu sur une échelle de temps comparable à l'inverse de la fréquence de l'onde (c'est-à-dire si elles ne changent pas trop au cours d'une période). Le rayonnement est dit polarisé s'il existe une corrélation entre E_x et E_y . Les paramètres de Stokes sont définis par les moyennes temporelles :

$$I = \langle |E_x|^2 + |E_y|^2 \rangle = \langle a_x^2 + a_y^2 \rangle \quad (2.72)$$

$$Q = \langle |E_x|^2 - |E_y|^2 \rangle = \langle a_x^2 - a_y^2 \rangle \quad (2.73)$$

$$U = \langle 2 \operatorname{Re}(E_x E_y^*) \rangle = \langle 2 a_x a_y \cos(\varphi_x - \varphi_y) \rangle \quad (2.74)$$

$$V = \langle 2 \operatorname{Im}(E_x E_y^*) \rangle = \langle 2 a_x a_y \sin(\varphi_x - \varphi_y) \rangle. \quad (2.75)$$

La lumière naturelle (non polarisée) est décrite par $Q = U = V = 0$. Q et U caractérisent la polarisation linéaire tandis que V décrit la polarisation circulaire. On peut aussi montrer ce résultat important à l'aide des matrices de Pauli :

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

En fonction de ces matrices, I , Q , U et V peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} I &= \langle \vec{E}^\dagger \sigma_0 \vec{E} \rangle \\ Q &= \langle \vec{E}^\dagger \sigma_3 \vec{E} \rangle \\ U &= \langle \vec{E}^\dagger \sigma_1 \vec{E} \rangle \\ V &= \langle \vec{E}^\dagger \sigma_2 \vec{E} \rangle \end{aligned} \quad (2.76)$$

où l'on a posé :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}.$$

Toute rotation à 2 dimensions peut s'écrire :

$$R(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = \sigma_0 \cos \phi + i\sigma_2 \sin \phi.$$

Compte-tenu des relations de commutation des matrices de Pauli⁷, et des relations 2.76,

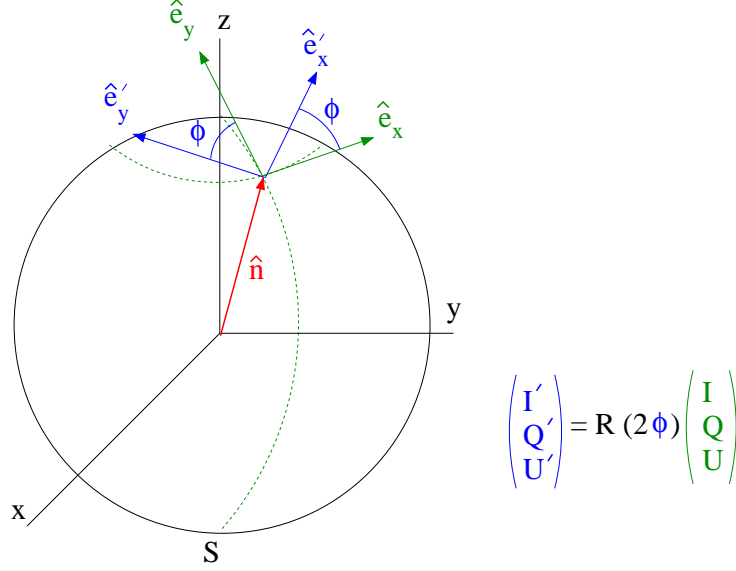


Fig. 2.18: Transformation des paramètres de Stokes lors d'une rotation. Un observateur mesure la polarisation d'une onde incidente provenant de la direction \hat{n} et définit dans son système de référence (\hat{e}_x, \hat{e}_y) les paramètres de Stokes de l'onde I , Q , U et V . S'il tourne ses axes d'un angle ϕ autour de \hat{n} pour les amener en (\hat{e}'_x, \hat{e}'_y) , I et V (non représenté ici) ne sont pas modifiés au cours de la transformation, contrairement à Q et U .

il est clair que I et V sont invariants par rotation alors que Q et U ne le sont pas ; ils se transforment selon (voir Fig. 2.18) :

$$\begin{aligned} Q' &= Q \cos 2\phi + U \sin 2\phi \\ U' &= -Q \sin 2\phi + U \cos 2\phi \end{aligned} \quad (2.77)$$

que l'on peut écrire avantageusement sous la forme :

$$(Q \pm iU)' = e^{\mp 2i\phi} (Q \pm iU), \quad (2.78)$$

l'exposant “ ’ ” signifiant “après rotation”. La relation 2.78 nous montre que les fonctions $Q + iU$ et $Q - iU$ sont des fonctions de spin 2 sur la sphère⁸. I et V sont donc des observables indépendantes du système de coordonnées utilisé pour étudier l'onde. Il est possible d'en fabriquer une autre à partir de Q et U : c'est le “vecteur” de polarisation linéaire \vec{P} . Sa direction fait un angle :

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \frac{U}{Q} \quad (2.79)$$

⁷ $[\sigma_i, \sigma_j] = i\sigma_k$ si le triplet $(i, j, k) \in \{1, 2, 3\}^3$ est une permutation paire de $(1, 2, 3)$.

⁸ Une fonction définie sur la sphère est dite de spin 2 si elle se transforme selon $f(\vec{n}) \mapsto e^{-2i\phi} f(\vec{n})$ au cours d'une rotation d'angle ϕ autour de la direction \vec{n} , entre deux systèmes de référence tangents à la sphère en \vec{n} (voir Fig. 2.18).

avec le vecteur x du système de coordonnées choisi et sa norme vaut :

$$P = \sqrt{Q^2 + U^2}.$$

Au cours d'une rotation d'angle ϕ , P est invariant (par définition) alors que α se transforme $\alpha - \phi$. α caractérise donc une direction constante, indépendante du système de référence. Dans le cas d'un rayonnement polarisé linéairement ($V = 0$), l'orientation de la direction de la polarisation est reliée au signe de Q et U via l'Eq. 2.79. Cela se traduit schématiquement par la Fig. 2.19. Enfin, la relation de conservation de l'énergie *pour une onde polarisée à 100 %* entre les 4 paramètres de Stokes est :

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2 ;$$

sinon, on a l'inégalité :

$$I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2.$$

Enfin, une propriété fondamentale des paramètres de Stokes est qu'ils sont additifs lorsque

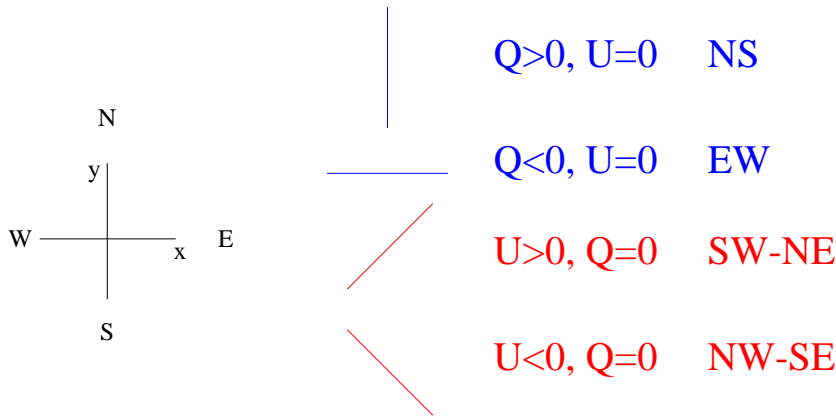


Fig. 2.19: Orientation de la direction de polarisation. Pour trouver l'orientation de la polarisation, on peut raisonner sur l'Eq. 2.79 ou bien se donner un système de référence xy et regarder les cas extrêmes du champ électrique $E_x = 0$, $E_y = 0$, $E_x = E_y$ etc... Compte-tenu des définitions des paramètres de Stokes, il est facile de voir les relations entre les signes de Q et U et les intensités sur les axes x et y .

l'on superpose deux ondes incohérentes.

2.6.2 Polarisation du CMB et quadrupôles

En supposant qu'à l'époque de la dernière diffusion l'univers est bien décrit par un fluide couplé photons-baryons-électrons, nous allons démontrer que si le rayonnement présente des anisotropies quadrupolaires alors le CMB doit être polarisé. En revanche, si le rayonnement est uniforme, aucune polarisation n'est engendrée.

La diffusion des photons sur les électrons est décrite par la diffusion Thomson, dont la section efficace différentielle⁹ est donnée par :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3\sigma_T}{8\pi} |\epsilon \cdot \epsilon'|^2$$

où σ_T est la section efficace Thomson totale. Pour comprendre qualitativement le lien entre polarisation et diffusion Thomson, nous allons nous appuyer sur la Fig. 2.20. Dans

⁹ Nous considérons ici la limite non-relativiste car $T \sim 3000 \text{ K} \sim 10^{-6} m_e c^2 \ll m_e c^2$.

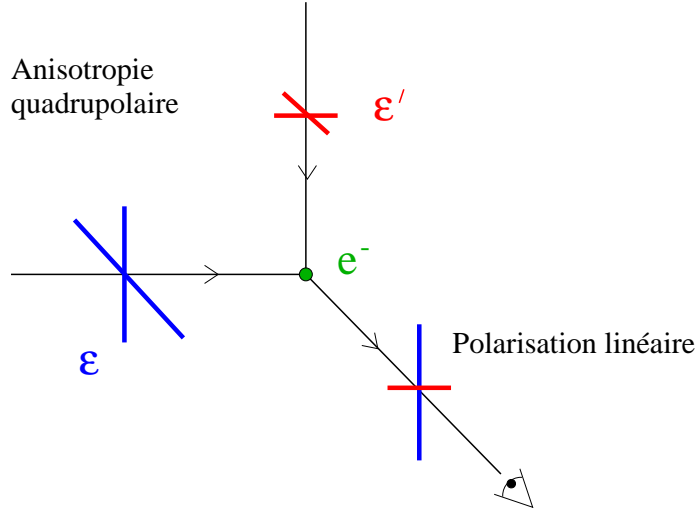


Fig. 2.20: **Quadrupôles et polarisation.** Une anisotropie quadrupolaire dans le flux de photons engendre une polarisation linéaire dans le rayonnement détecté par l'observateur (voir les explications dans le texte).

cette figure, l'électron représenté est au repos. Supposons qu'il est éclairé par la gauche par un flux de photons non polarisés plus intense que la moyenne. Étant donnée la forme ($|\epsilon \cdot \epsilon'|$) de la section efficace de l'interaction, la composante verticale de la polarisation est préférentiellement transmise. Supposons également qu'il est éclairé par en haut par un flux de photons non polarisés moins intense que la moyenne. À nouveau, en utilisant le même argument, la polarisation horizontale est préférentiellement transmise. L'observateur va donc voir une composante verticale très intense et une composante horizontale peu intense : il constate que le rayonnement reçu est polarisé linéairement. En partant de deux faisceaux de photons non polarisés mais présentant une anisotropie quadrupolaire, on peut de la sorte générer de la polarisation linéaire. Pour que le CMB soit polarisé, il faut des quadrupôles dans le rayonnement sur la surface de dernière diffusion. S'il y en a eu, on s'attend à ce qu'il existe une certaine corrélation entre les fluctuations de température du CMB et la polarisation. Pour cette raison, non seulement les spectres de puissance C_ℓ^T , C_ℓ^E et C_ℓ^B sont importants pour mesurer les paramètres cosmologiques mais aussi les spectres de corrélation entre la température et la polarisation.

Notons que la diffusion Thomson ne peut pas générer de la polarisation circulaire. En effet, la diffusion Thomson modifie les amplitudes des composantes E_x et E_y du champ électrique mais pas leur phase. Elle peut donc faire tourner la direction de la polarisation. Pour cette raison, nous ne considérerons plus le paramètre de polarisation circulaire V dans la suite.

Nous allons démontrer quantitativement la relation entre polarisation linéaire et quadrupôles. Nous utilisons pour cela le système de référence représenté dans la Fig. 2.21 : l'axe z est celui de la direction de la lumière émergente. Celle-ci est décrite par les paramètres de Stokes I , Q , U et V . La lumière incidente, non polarisée, est décrite par son intensité $I'(\theta, \phi)$. ϵ_x et ϵ'_x sont perpendiculaires au plan de la diffusion, ϵ_y et ϵ'_y sont perpendiculaires à ϵ_x et ϵ'_x et sont contenus dans le plan de la diffusion. Comme Kosowsky (1996), nous utiliserons $I_x = (I + Q)/2$ et $I_y = (I - Q)/2$ plutôt que I et Q pour décrire la diffusion. L'onde incidente, non polarisée, est telle que $I'_x = I'_y = I'/2$. Les

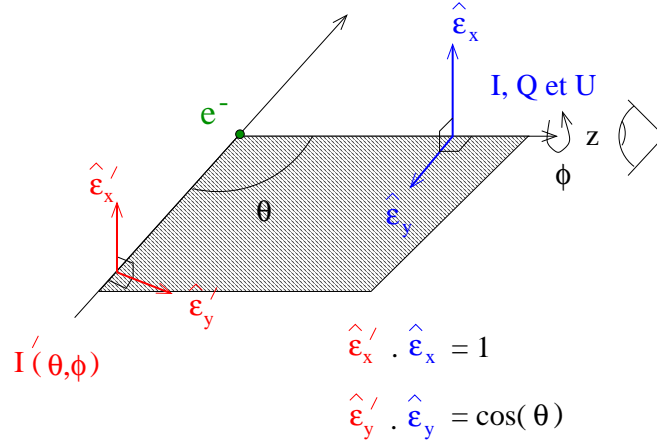


Fig. 2.21: **Diffusion Thomson d'un photon par un électron.** Le photon sortant ayant un état de polarisation proche de celui du photon entrant est favorisé.

intensités diffusées sont :

$$I_x = \frac{3\sigma_T}{8\pi} (I'_x \underbrace{(\epsilon'_x \cdot \epsilon_x)^2}_1 + I'_y \underbrace{(\epsilon'_y \cdot \epsilon_x)^2}_0) = \frac{3\sigma_T}{16\pi} I' \quad (2.80)$$

$$I_y = \frac{3\sigma_T}{8\pi} (I'_x \underbrace{(\epsilon'_x \cdot \epsilon_y)^2}_0 + I'_y \underbrace{(\epsilon'_y \cdot \epsilon_y)^2}_{\cos^2 \theta}) = \frac{3\sigma_T}{16\pi} I' \cos^2 \theta, \quad (2.81)$$

soit

$$\begin{aligned} I &= I_x + I_y = \frac{3\sigma_T}{16\pi} I' (1 + \cos^2 \theta) \\ Q &= I_x - I_y = \frac{3\sigma_T}{16\pi} I' \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Pour le calcul de U , on utilise la loi de transformation de Q et U au cours d'une rotation (voir Eq. 2.77). On impose que l'observateur tourne ses axes de $\pi/4$ autour de z (voir Fig. 2.21) et on recalcule Q car dans ce cas, $Q^R = Q \cos \pi/2 + U \sin \pi/2 = U$. Ce nouveau Q calculé dans le système de référence tourné est alors égal à U dans le système de référence non tourné. On trouve alors :

$$\begin{aligned} I_x^R &= \frac{3\sigma_T}{8\pi} (I'_x \underbrace{(\epsilon'_x \cdot \epsilon_x^R)^2}_{1/2} + I'_y \underbrace{(\epsilon'_y \cdot \epsilon_x^R)^2}_{\cos^2 \theta/2}) = \frac{3\sigma_T}{32\pi} I' (1 + \cos^2 \theta) \\ I_y^R &= \frac{3\sigma_T}{8\pi} (I'_x \underbrace{(\epsilon'_x \cdot \epsilon_y^R)^2}_{1/2} + I'_y \underbrace{(\epsilon'_y \cdot \epsilon_y^R)^2}_{\cos^2 \theta/2}) = \frac{3\sigma_T}{32\pi} I' (1 + \cos^2 \theta), \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} I^R &= \frac{3\sigma_T}{16\pi} I' (1 + \cos^2 \theta) \\ Q^R &= 0 = U. \end{aligned}$$

On vérifie bien entendu l'invariance par rotation de I : $I^R = I$. Dans ces dernières équations, l'exposant R signifiait "dans le système de référence tourné". Nous avons maintenant

les expressions des intensités et Q diffusés par un électron. Pour connaître l'intensité et Q total, il faut intégrer sur toutes les directions incidentes. On peut donc écrire :

$$I = \frac{3\sigma_T}{16\pi} \int I'(\theta, \phi) (1 + \cos^2 \theta) d\Omega$$

$$Q = \frac{3\sigma_T}{16\pi} \int I'(\theta, \phi) \sin^2 \theta \cos 2\phi d\Omega$$

$$U = \frac{3\sigma_T}{16\pi} \int I'(\theta, \phi) \sin^2 \theta \sin 2\phi d\Omega.$$

On décompose habituellement I' en harmoniques sphériques :

$$I'(\theta, \phi) = \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \quad (2.82)$$

$$= \sum_{\ell m} a_{\ell m} \lambda_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (2.83)$$

L'intégrale sur ϕ dans le calcul de I fait apparaître un terme δ_{m0} : seuls les $a_{\ell 0}$ interviennent. Compte-tenu de l'orthogonalité des λ_{ℓ}^m , on montre finalement que seuls a_{00} et a_{20} contribuent. Pour Q et U , on montre de la même manière que seul a_{22} contribue. Le calcul exact donne les résultats suivants :

$$I = \frac{3\sigma_T}{16\pi} \left(\frac{8}{3} \sqrt{\pi} a_{00} + \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} a_{20} \right) \quad (2.84)$$

$$Q = \frac{3\sigma_T}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \operatorname{Re}(a_{22}) \quad (2.85)$$

$$U = -\frac{3\sigma_T}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \operatorname{Im}(a_{22}). \quad (2.86)$$

La diffusion Thomson peut générer de la polarisation **linéaire** si l'intensité du rayonnement incident a une composante non nulle sur Y_2^2 ($a_{22} \neq 0$), c'est-à-dire si le rayonnement présente une **anisotropie quadrupolaire**.

Les estimations du taux de polarisation attendu varient peu en fonction du modèle cosmologique choisi et est de l'ordre de 10 % des fluctuations de températures (Harari et Zaldarriaga, 1993; Crittenden et al., 1993b). Nous allons préciser ce que signifie ce 10 %. Tout rayonnement peut être décrit par une superposition de deux ondes, l'une non polarisée ($_{\text{NP}}$) et l'autre polarisée à 100 % ($_{\text{P}}$). Ces deux ondes sont elles-mêmes décrites par deux ensembles de paramètres de Stokes :

$$\begin{aligned} \{I, Q, U\}_{\text{NP}} &= \left\{ I - \sqrt{Q^2 + U^2}, 0, 0 \right\} \quad \text{pour la partie non polarisée;} \\ \{I, Q, U\}_{\text{P}} &= \left\{ \sqrt{Q^2 + U^2}, Q, U \right\} \quad \text{pour la partie polarisée à 100 \% ;} \end{aligned}$$

I désignant ici l'intensité *totale*. L'intensité polarisée est :

$$I_{\text{P}} = \sqrt{Q^2 + U^2}.$$

Lorsque l'on dit que le CMB est polarisé à 10 % des fluctuations de température du CMB, on entend que $I_{\text{P}} \sim 10 \% \delta T$ c'est-à-dire de l'ordre du μK . Une revue très détaillée sur la polarisation du CMB est faite dans Kosowsky (1996). Se référer aussi à la thèse de Zaldarriaga (1998).

2.6.3 Figures de polarisation — champs E et B

Nous avons vu que de la polarisation linéaire était créée s'il existait des quadrupôles sur la surface de dernière diffusion. De tels quadrupôles existent. Les fluctuations de la métrique, correspondant aux fluctuations de densité (scalaire), à la vorticité du fluide photon-baryon (vectorielle) et aux ondes gravitationnelles primordiales (tensorielles) présentent toutes des quadrupôles. Nous allons illustrer comment ils apparaissent dans le cas des fluctuations de densité et des ondes gravitationnelles. Du point de vue de l'observateur, la polarisation s'observe autour des points remarquables du CMB, les points chauds et les points froids. Une surdensité de matière sur la surface de dernière diffusion engendre un fort potentiel gravitationnel (en valeur absolue) et correspond à un point froid du CMB puisque les photons provenant de cette région ont dû subir un redshift plus important que d'autres en provenance d'une région où le potentiel gravitationnel était plus faible (moins négatif). Réciproquement, nous percevons les sous-densités de matière comme des points chauds du CMB. De même, les ondes gravitationnelles primordiales, décrites par les fluctuations tensorielles de la métrique engendrent également des points chauds et des points froids.

Nous allons voir que la figure de polarisation autour d'un point chaud ou d'un point froid diffère : elle dépend d'une part de la température du point considéré et d'autre part de la nature de la perturbation responsable de la température de ce point. Nous verrons par exemple que la polarisation du CMB peut mettre en évidence de façon spécifique la présence d'ondes gravitationnelles primordiales.

Les fluctuations de densité

Nous considérons ici une surdensité de masse à symétrie sphérique. Une telle surdensité nous apparaît comme une région où le potentiel a une symétrie circulaire, puisque nous l'observons en projection sur la sphère céleste. Le centre de la perturbation est le centre de symétrie.

Intéressons-nous aux trajectoires des électrons, puisque ce sont eux qui diffusent les photons que nous observons et raisonnons sur la Fig. 2.22. Le potentiel gravitationnel moyen de la surface de dernière diffusion est représentée par la ligne horizontale. Les fluctuations de densité se traduisent par des fluctuations dans le potentiel gravitationnel, représentée par la courbe oscillant autour du potentiel moyen dans la Fig. 2.22a. Comme nous l'avons vu, des régions se trouvant au-dessus de la moyenne sont des sous-densités et correspondent à des points chauds de température du CMB alors que celles se trouvant en-dessous sont des sur-densités, les photons doivent perdre de l'énergie pour s'extraire de ces puits de potentiel et donnent les points froids du CMB. La Fig. 2.22b représente un puits de potentiel vu sur la surface de la sphère céleste. Nous allons suivre la trajectoire de l'électron représenté par le point noir ; il tombe vers le centre de la perturbation. Les différents cercles concentriques représentent (arbitrairement) des isocontours de densité. La vitesse d'un point est d'autant plus grande que ce point est proche du centre de la perturbation, de sorte que les électrons se trouvant devant ou derrière notre électron test s'éloignent de lui. Par contre, ceux qui se trouvent sur ses côtés s'en rapprochent car les lignes de courant convergent au centre de la perturbation.

Par conséquent, le fluide cosmique se rapproche de notre électron par ses côtés et s'éloignent de lui dans la direction de son mouvement, résultant en un quadrupôle dans son système de référence propre ; les grands lobes symbolisent une forte intensité (les électrons se rap-

prochent) et les petits une faible intensité (ils s'éloignent). À cause du couplage photons-baryons-électrons, le flux de photons est similaire à celui des électrons : l'électron test que nous avons choisi est donc éclairé par un rayonnement qui présente une anisotropie quadrupolaire ; la diffusion s'accompagne, comme nous l'avons vu, d'une polarisation linéaire. En appliquant les règles de la diffusion Thomson sur la polarisation, nous voyons que les photons diffusés présentent une polarisation parallèle à la trajectoire de l'électron, c'est-à-dire radiale dans le système de référence radial lié au centre de la perturbation (voir Fig. 2.22c).

Un point froid du CMB engendré par une fluctuation de densité donne une figure de polarisation radiale.

Le raisonnement concernant la sous-densité est analogue. Il suffit de changer la direction des vitesses dans le quadrupôle et l'on trouve que la direction de la polarisation est tournée de 90° par rapport au cas de la sur-densité.

Un point chaud du CMB engendré par une fluctuation de densité donne une figure de polarisation tangentielle.

Qu'en est-il des paramètres de Stokes dans le voisinage d'un point chaud ou froid dans le cas des perturbations de densité ? Dans la Fig. 2.23, l'observateur est au centre de la sphère céleste. La perturbation qu'il regarde, à symétrie circulaire, est représentée par le cercle. On se place dans le **système de référence radial** lié à cette perturbation et on considère les paramètres de Stokes Q_{rad} et U_{rad} dans ce système, caractérisé par les vecteurs de base locaux e_r et e_θ . De part sa symétrie — la perturbation est invariante par **parité** — I_{rad} , Q_{rad} et U_{rad} doivent être aussi invariants par parité, puisqu'il s'agit toujours de la même perturbation : e_θ se transforme en $-e_\theta$, e_r reste inchangé. Formelle-

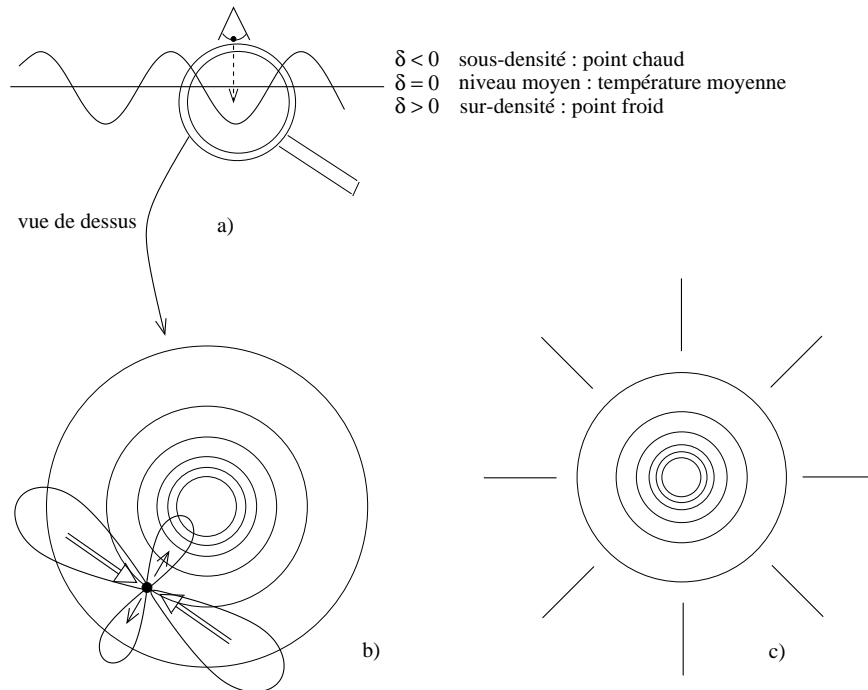


Fig. 2.22: Polarisation autour d'une sur-densité. Allure de la figure de polarisation autour d'un point froid du CMB, correspondant à une sur-densité dans le potentiel gravitationnel. Inversement, la figure de polarisation autour d'un point chaud est tournée de 90° par rapport à celle-ci : la polarisation est orientée tangentiellement.

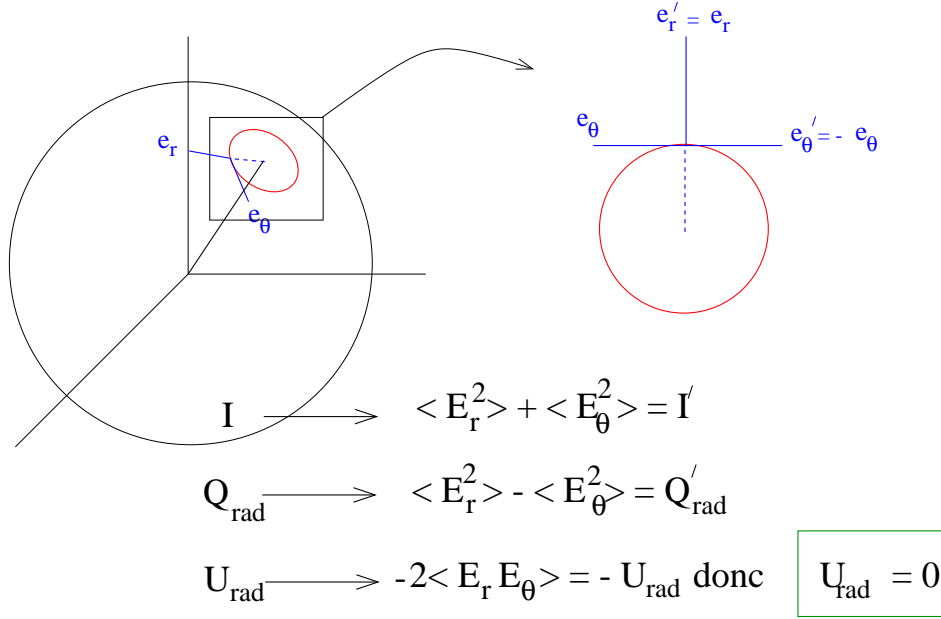


Fig. 2.23: **Paramètres de Stokes autour d'une perturbation scalaire.** À cause de l'invariance sous parité, une perturbation de densité ne génère pas de polarisation U_{rad} .

ment, sous cette tranformation, on constate que I_{rad} et Q_{rad} restent bien invariants alors que U_{rad} se transforme en son opposé : il faut donc que $U_{\text{rad}} = 0$.

Une perturbation scalaire ne peut donc pas générer de polarisation U_{rad} .

Les fluctuations tensorielles

Les fluctuations tensorielles sont identifiables aux ondes gravitationnelles primordiales. Une onde gravitationnelle a la propriété de déformer l'espace temps lors de son passage. Par exemple, un ensemble de particules test disposées en cercle comme sur la Fig. 2.24 est déformé quand l'onde se propageant sur z passe. Pour le calcul des paramètres de Stokes, nous nous plaçons à nouveau dans le système de référence radial (e_r, e_θ) lié à la perturbation. La transformation par parité transforme, comme dans le cas précédent, (e_r, e_θ) en $(e_r, -e_\theta)$. Lors du passage de l'onde gravitationnelle, les particules tests ne sont plus en cercle mais en ellipse, figure qui n'est pas invariante par parité (sauf cas particulier où l'on regarde le long des axes de symétrie de l'ellipse) ; par conséquent les paramètres de Stokes Q_{rad} et U_{rad} ne le sont pas non plus. Dans ce cas, $U'_{\text{rad}} \neq U_{\text{rad}}$.

Une perturbation tensorielle peut générer les deux types de polarisation Q_{rad} et U_{rad} .

Les champs de polarisation E et B

Nous voyons ainsi la différence fondamentale entre les fluctuations scalaires et les fluctuations tensorielles : les premières ne donnent que de la polarisation Q_{rad} alors que les secondes donnent à la fois de la polarisation Q_{rad} et U_{rad} .

Le problème que nous avons pour décrire la polarisation est la dépendance dans le système de coordonnées, puisque les résultats que nous avons établis précédemment ne

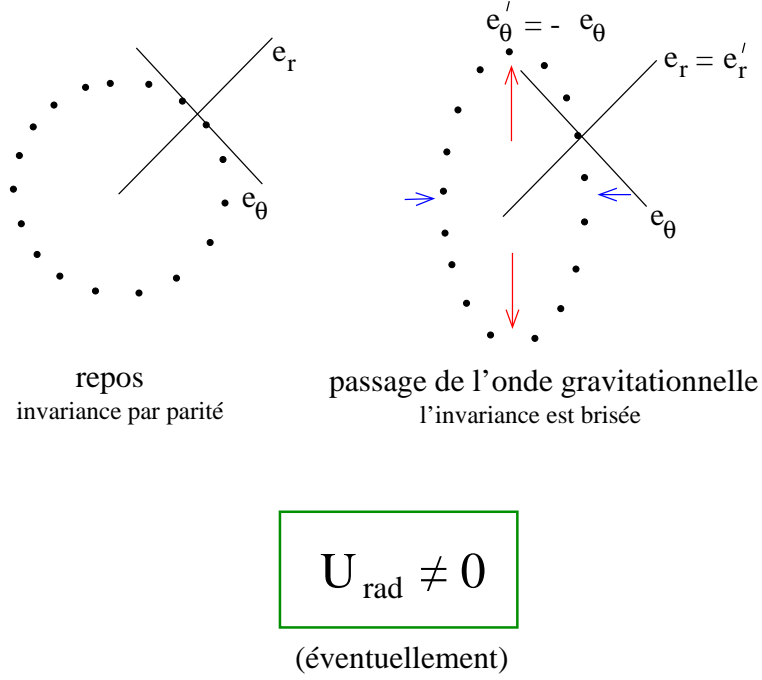


Fig. 2.24: Paramètres de Stokes autour d'une perturbation tensorielle. Contrairement aux perturbations scalaires, les perturbations tensorielles ne sont pas invariantes par parité et peuvent générer de la polarisation U_{rad} . Comparer avec la Fig. 2.23.

sont valables que dans le système de référence radial du point que l'on regarde. Il est préférable de pouvoir considérer la polarisation indépendamment d'un système de référence local. Pour s'en affranchir, nous introduisons deux nouvelles quantités E et B définies comme des valeurs moyennes pondérées de Q_{rad} et U_{rad} . La moyenne consiste à intégrer les paramètres de Stokes radiaux autour du centre de la perturbation le long de cercles concentriques de rayons de plus en plus grands. Pour caractériser la polarisation autour d'un point, il faut que les cercles de rayons faibles contribuent plus que les cercles lointains. De la sorte, E et B ne dépendent pas du système de référence. Ils sont définis par :

$$E(\vec{n}) = - \int d^2\vec{n}' w(\vec{n} - \vec{n}') Q_{\text{rad}}(\vec{n}') \quad (2.87)$$

$$B(\vec{n}) = - \int d^2\vec{n}' w(\vec{n} - \vec{n}') U_{\text{rad}}(\vec{n}') \quad (2.88)$$

où w est une fonction de poids valant $w(\theta) = 1/(\pi\theta^2)$ pour $\theta \neq 0$ et 0 pour $\theta = 0$ (Zaldarriaga, 1998). Le fait que le poids vale 0 pour un cercle de rayon nul signifie que l'on ne peut pas parler de polarisation en un point, mais seulement dans son voisinage.

Par construction, **E est un champ scalaire invariant par rotation et par parité, B est un champ scalaire invariant par rotation uniquement.** Les appellations E et B pour les champs de polarisation sont dues à leurs propriétés de symétrie, analogues à celles des champs électrique et magnétique. Connaissant l'orientation de la polarisation en fonction du signe de Q et U , on en déduit facilement le lien entre le signe de Q_{rad} et U_{rad} et le signe de E et B , voir la Fig. 2.25.

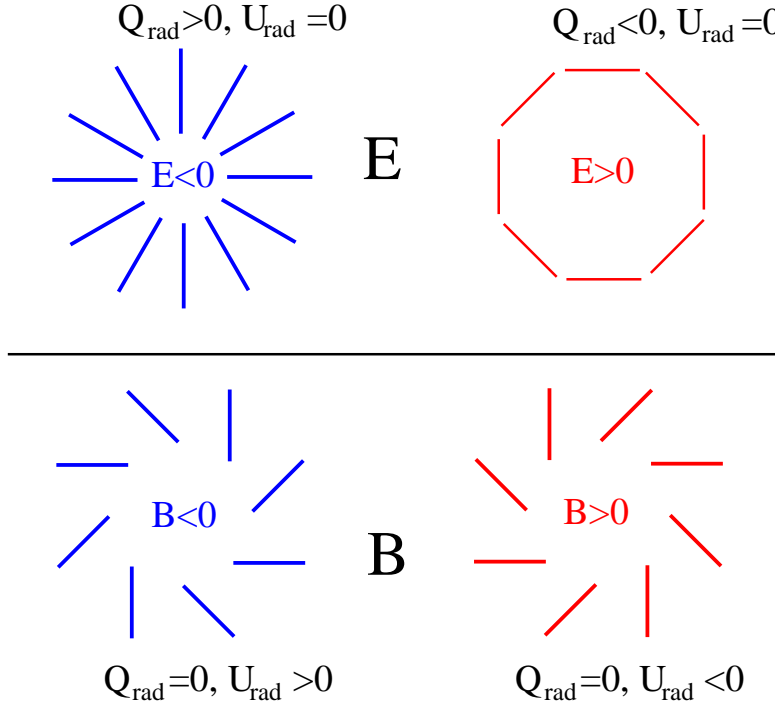


Fig. 2.25: **Figures de polarisation autour des champs E et B .** La figure de polarisation autour de E est manifestement invariante par parité, contrairement à celle autour du champ B . Le lien entre le signe de E ou B et les paramètres de Stokes définis dans le système radial se déduit facilement des Eqs. 2.87 et 2.88.

2.6.4 Aperçu de l'équation de transfert

De même que pour la température, il nous faut étudier la fonction de distribution des photons. Le cas polarisé est plus compliqué car il faut considérer l'évolution des quatre paramètres de Stokes. Pour cela, nous posons :

$$\hat{\mathbf{n}}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} I_l \\ I_r \\ U \\ V \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur colonne représente les paramètres de Stokes provenant de la direction définie par les angles (θ, ϕ) à la fréquence ν . Les intensités I_l et I_r sont celles mesurées sur deux directions orthogonales ; leur somme est l'intensité totale I et leur différence est le paramètre de Stokes Q . Avec ces variables, et au premier ordre, les équations de transfert s'écrivent :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma_\alpha}{a} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{d\nu}{dt} \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \hat{\mathbf{n}} = -\sigma_T n_e \mathbb{D}(\hat{\mathbf{n}})$$

où σ_T est la section efficace totale (intégrée) de la diffusion Thomson, n_e est la densité des électrons libres (ceux qui sont susceptibles de diffuser les photons) et γ_α sont les cosinus directeurs du vecteur unitaire dans la direction (θ, ϕ) . L'opérateur \mathbb{D} est donné par :

$$\mathbb{D}(\hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \mathbf{P}(\mu, \phi, \mu', \phi') \hat{\mathbf{n}}' d\mu' d\phi'. \quad (2.89)$$

Dans cette équation, $\mu = \cos \theta$, $\mu' = \cos \theta'$. \mathbf{P} est une matrice 4×4 (introduite par Chandrasekhar), appelée *matrice de phase*. Elle s'écrit comme le produit de 3 matrices :

$$\mathbf{P}(\cos \theta, \phi, \cos \theta', \phi') = \mathbf{L}(\pi - i_2) \mathbf{R}(\cos \Theta) \mathbf{L}(-i_1).$$

La matrice \mathbf{L} caractérise la façon dont changent les composantes (I_y, I_x, U, V) au cours

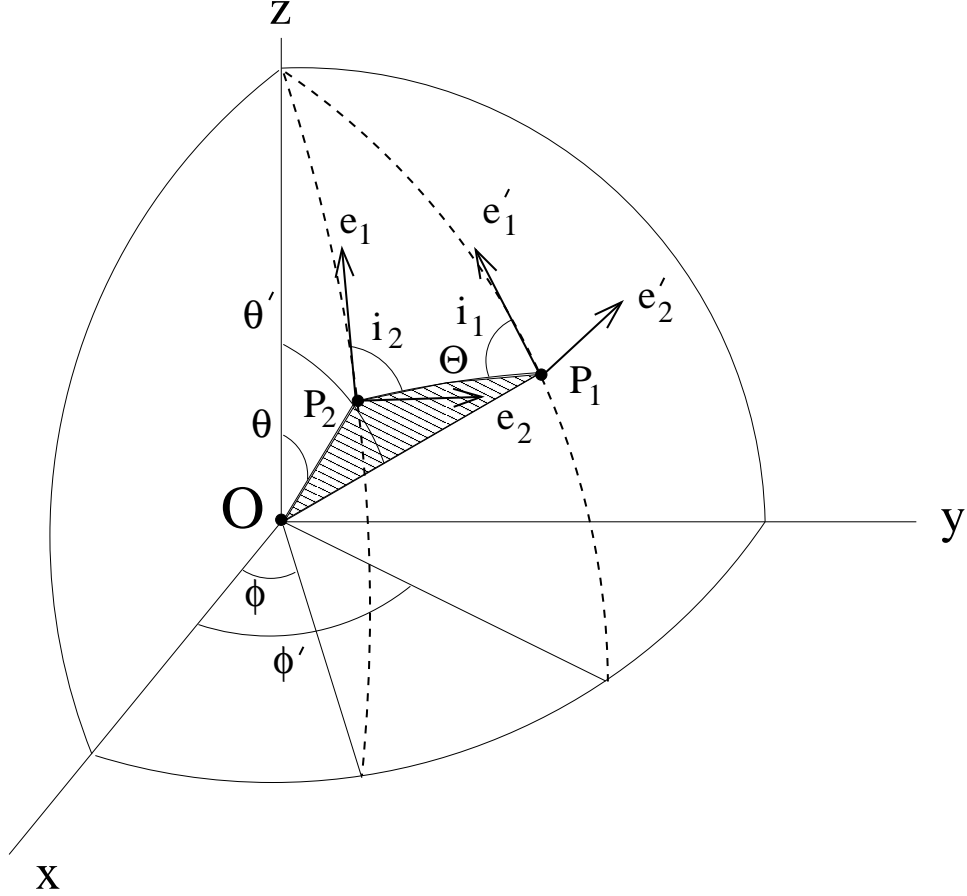


Fig. 2.26: **Géométrie de la diffusion Thomson.** Le plan de la diffusion est le plan $[OP_1P_2]$. L'angle Θ est défini par $\Theta = (\mathbf{OP}_1, \mathbf{OP}_2)$.

d'une rotation des axes d'un angle ϕ . Son expression est la suivante :

$$\mathbf{L}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & \frac{\sin 2\phi}{2} & 0 \\ \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & -\frac{\sin 2\phi}{2} & 0 \\ -\sin 2\phi & \sin 2\phi & \cos 2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice \mathbf{R} contient les coefficients de la diffusion Thomson ; parmi ces coefficients, nous en avons déjà trouvé deux $((3/2) \cos^2 \Theta)$ sur la composante y et $(3/2)$ sur la composante x lorsque nous avons montré que la polarisation était créée par les quadrupôles, page 90,

Eqs. 2.80 et 2.81. Un calcul plus général donnerait sur les vecteurs $(I_y, I_x, U, V)^{10}$:

$$\mathbf{R} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} \cos^2 \Theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix}.$$

Avec cette matrice, *et en ayant le système de coordonnées canonique lié au plan de la diffusion* comme dans la Fig. 2.21, l'intensité sortante $\hat{\mathbf{n}}$ est relié à l'intensité entrante $\hat{\mathbf{n}}'$ par :

$$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{R} \hat{\mathbf{n}}'.$$

Supposons qu'un rayonnement provenant de la direction (θ', ϕ') soit diffusé dans la direction (θ, ϕ) . Le plan de la diffusion est le plan $[\mathbf{OP}_1, \mathbf{OP}_2]$. Les points P_1 et P_2 sont repérés par leurs coordonnées (θ', ϕ') et (θ, ϕ) respectivement. En chacun de ces points, on définit deux vecteurs $((\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ pour P_1 et $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ pour P_2) tangents à la sphère, orthogonaux entre eux. L'un d'eux est parallèle au plan $[\mathbf{OX}, \mathbf{OY}]$, l'autre pointe vers les Z positifs (voir Fig. 2.26). Les angles i_1 et i_2 sont les angles séparant les vecteurs \mathbf{e}'_1 et \mathbf{e}_1 respectivement du plan de la diffusion. Ces vecteurs sont très commodes d'utilisation mais ils diffèrent des vecteurs canoniques de la diffusion par une rotation autour de \mathbf{OP}_1 et de \mathbf{OP}_2 . L'effet d'une telle rotation se traduit sur les paramètres de Stokes par la multiplication par la matrice \mathbf{L} . Dans le cas général que nous considérons ici, l'intensité $\hat{\mathbf{n}}$ diffusée dans la direction (θ, ϕ) s'écrit donc :

$$\hat{\mathbf{n}}(\theta, \phi) = \underbrace{\mathbf{L}(\pi - i_2)}_{\substack{\text{du repère} \\ \text{canonique} \\ \text{vers le repère} \\ \text{sur la sphère} \\ \text{en } P_2}} \times \underbrace{\mathbf{R}(\cos \Theta)}_{\substack{\text{diffusion} \\ \text{dans le repère} \\ \text{canonique}}} \times \underbrace{\mathbf{L}(i_1)}_{\substack{\text{du repère sur} \\ \text{la sphère en } P_1 \\ \text{vers le repère} \\ \text{canonique}}} \underbrace{\hat{\mathbf{n}}'(\theta', \phi')}_{\substack{\text{dans le repère} \\ \text{sur la sphère} \\ \text{en } P_1}}$$

La contribution de l'intégrale définissant l'opérateur \mathbb{D} dans l'Eq. 2.89 représente donc celle des photons diffusés, puisque l'intégrale est faite sur toutes les directions incidentes.

Dans cette importante section, nous avons montré que le CMB est vraisemblablement polarisé et que cette polarisation est due aux quadrupôles présents à l'époque de dernière diffusion. Nous avons ensuite introduit deux champs scalaires définis sur la sphère : ce sont les champs E et B . Ces champs ont l'immense avantage d'être invariants sous les rotations, contrairement aux paramètres de Stokes Q et U . Enfin, nous avons montré que les fluctuations scalaires (ou de densité) ne pouvaient que contribuer à E alors que les fluctuations tensorielles (ou ondes gravitationnelles primordiales) contribuaient à la fois à E et à B . L'un des intérêts de mesurer la polarisation du CMB est que son spectre de puissance E permet de séparer ces deux contributions et de fournir des contraintes fortes sur les modèles d'inflation. La détection de polarisation de type B serait une preuve directe de l'existence des ondes gravitationnelles primordiales.

¹⁰ l'ordre x et y a été inversé de façon à avoir exactement la même matrice que dans Chandrasekhar (1960).

Conclusion de la partie théorique

Le modèle standard du *Big-Bang* est maintenant accepté par une énorme majorité de physiciens. Il reste, heureusement, quelques irréductibles mais ils se font de plus en plus rares, les faits observationnels étant le plus souvent en désaccord avec les autres théories proposées; citons par exemple le travail de Narlikar et Hoyle sur le modèle de l'état quasi-stationnaire, alternative au *Big-Bang*, qui a eu pendant très longtemps une certaine popularité. Une revue récente de cette théorie est donnée dans Nayeri et al. (1999). On trouvera une discussion de plusieurs théories alternatives sur la page web de E.L. Wright¹¹.

La théorie décrivant l'univers très primordial n'existe pas encore. On a besoin, aux échelles d'énergie mises en jeu, d'une description quantique de la gravitation. Les théories à la mode actuellement sont la M-théorie et la cosmologie branaire (Binétruy et al., 1999; Easson, 2000). Le cadre général du *Big-Bang* est globalement fixé, du moins dans ses grandes lignes. Il reste encore bien évidemment des problèmes non résolus : pour n'en citer qu'un, le mécanisme responsable de la formation des structures, ou plus précisément de l'apparition des premières inhomogénéités n'est pas encore complètement élucidé. Sur ce point particulier, la théorie de l'inflation, que nous avons décrite page 57, semble cependant de plus en plus favorisée par rapport au modèle concurrent, celui des défauts topologiques dont nous n'avons pas parlé. Les dernières estimations du spectre de puissance des fluctuations de température du CMB semblent rejeter complètement la formation des structures par défauts topologiques (Durrer, 2000). On attend avec grande impatience les résultats de l'analyse des données du vol Antarctique du ballon BOOMERANG (de Bernardis et al., 1999; Mauskopf et al., 1999) : si les estimations présentées des tailles des barres d'erreurs sur le spectre de puissance sont réalistes, on pourra commencer à contraindre l'inflation.

Nous avons essentiellement parlé du CMB comme moyen de mesurer les paramètres cosmologiques et de comprendre l'univers primordial. Il est vrai qu'ayant été émis très tôt par rapport à l'âge de l'univers, il contient des informations plus fondamentales que d'autres processus physiques plus tardifs. Il existe pourtant bien d'autres façons de mesurer ces paramètres; nous en avons énuméré quelques-unes page 20. Rappelons par exemple les supernovæ de type Ia qui permettent d'avoir accès à la combinaison $\Omega_m - \Omega_\Lambda$, à condition que ces étoiles soient bien standard comme on le pense (c'est-à-dire ont les mêmes propriétés quelque soit le redshift auquel elles se trouvent). Selon la méthode utilisée, on ne trouve pas toujours les mêmes valeurs pour les paramètres mesurés. Cela est dû en partie à une compréhension insuffisante des erreurs systématiques de l'expérience ou bien à des lacunes dans la théorie. La cosmologie observationnelle aura rempli sa tâche quand toutes les méthodes convergeront vers les mêmes résultats. On est encore loin de cet idéal, c'est ce qui fait le charme de cette science.

¹¹ <http://www.astro.ucla.edu/~wright/errors.html>

INTERMÈDES

A. CARTES ET SPECTRES DE PUISSANCE

B. LA MESURE DE LA POLARISATION

A. CARTES ET SPECTRES DE PUISSANCE

Cette courte partie technique explique comment on manipule les cartes complètes de ciel (c'est-à-dire couvrant 4π stréradians). Sont exposées d'une part les méthodes utilisées pour *synthétiser* des cartes de température et de polarisation à partir de spectres de puissance donnés, et d'autre part celles employées pour l'opération réciproque, c'est-à-dire *analyser* de telles cartes afin d'en extraire les spectres de puissance. Le travail présenté ici n'est pas original mais les programmes informatiques écrits en 1998 liés à l'analyse et la synthèse de cartes de polarisation l'étaient. À notre connaissance n'existaient alors que les programmes analysant et synthétisant des cartes de température (**anafast** et **synfast** de Górski et al.(1999)).

Les mathématiques sous-jacentes ne sont pas très compliquées mais elles ont l'inconvénient de faire apparaître des quantités lourdes à manier, comme les harmoniques sphériques de spin-2, inévitables lorsque l'on veut traiter le cas de la polarisation. Pour cette raison, les formules sont données dans l'appendice A, page 195. Cette étude a donné naissance à des programmes informatiques : **anatemp**, **syntemp**, **anapolar** et **synpolar** pour la synthèse et l'analyse des cartes de température de polarisation, ainsi que **lambuilder** pour le calcul des harmoniques sphériques usuelles et de spin-2.

Puisque nous nous intéressons particulièrement au CMB, nous utiliserons les notations associées : $\Delta T/T$ pour la carte de température et E et B pour les cartes de polarisation. Tout ce qui est exposé dans cette partie est bien entendu valable pour n'importe quelles cartes complètes (4π) de température et de polarisation.

A.1 Généralités

Nous avons défini dans la section "Polarisation du CMB" les champs E et B décrivant la polarisation (voir page 95). Ces champs sont scalaires, invariants par rotation et définis sur la sphère. Étant scalaires, on peut utiliser les harmoniques sphériques usuelles comme fonctions de base. La décomposition des trois champs scalaires $\Delta T/T$, E et B s'écrit :

$$\frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell m} a_{\ell m}^T Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{n}}) \quad (\text{A.1})$$

$$E(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell m} a_{\ell m}^E Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{n}}) \quad (\text{A.2})$$

$$B(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell m} a_{\ell m}^B Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{n}}). \quad (\text{A.3})$$

Les nombres complexes $a_{\ell m}^T$, $a_{\ell m}^E$ et $a_{\ell m}^B$ sont les *coefficients du développement* des champs sur les harmoniques sphériques. Par analogie avec le spectre de Fourier dans l'espace plan,

on définit les spectres de puissance par :

$$\begin{aligned} C_\ell^T &= \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=0}^{+\infty} |a_{\ell m}^T|^2 = \langle |a_{\ell m}^T|^2 \rangle \\ C_\ell^E &= \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=0}^{+\infty} |a_{\ell m}^E|^2 = \langle |a_{\ell m}^E|^2 \rangle \\ C_\ell^B &= \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=0}^{+\infty} |a_{\ell m}^B|^2 = \langle |a_{\ell m}^B|^2 \rangle. \end{aligned}$$

Nous n'avons pas accès directement aux champs E et B . Ce que l'on mesure avec un instrument, ce sont les paramètres de Stokes Q et U . Nous avons vu que $Q + iU$ et $Q - iU$ sont des quantités de spin-2 (voir Eq. 2.78 page 87). Pour les décrire sur la sphère, il nous faut des fonctions de base ayant les mêmes propriétés de symétrie : ce sont les harmoniques sphériques de spin-2, notées ${}_2Y_\ell^m$ et ${}_{-2}Y_\ell^m$. Sur ces fonctions de base, la décomposition de $Q \pm iU$ s'écrit :

$$(Q \pm iU)(\hat{n}) = \sum_{\ell m} a_{\pm 2\ell m} {}_{\pm 2}Y_\ell^m(\hat{n}). \quad (\text{A.4})$$

Le lien entre Q et U avec E et B se fait via les coefficients des développements (voir appendice A), qui vérifient les relations :

$$a_{\ell m}^E = -\frac{a_{2\ell m} + a_{-2\ell m}}{2} \quad (\text{A.5})$$

$$\text{et } a_{\ell m}^B = i \frac{a_{2\ell m} - a_{-2\ell m}}{2}. \quad (\text{A.6})$$

Le fait que $\Delta T/T$, Q et U sont des champs réels implique que les coefficients doivent être tels que :

$$\begin{aligned} a_{\ell m}^{T*} &= (-1)^m a_{\ell -m}^T \\ a_{\ell m}^{E*} &= (-1)^m a_{\ell -m}^E \\ a_{\ell m}^{B*} &= (-1)^m a_{\ell -m}^B \\ a_{2\ell m}^* &= (-1)^m a_{-2\ell -m} \\ a_{-2\ell m}^* &= (-1)^m a_{2\ell -m}. \end{aligned}$$

Enfin, remarquons que les deux sommes suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell m} &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \\ &\equiv \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{\ell=|m|}^{+\infty} \end{aligned}$$

Cette nouvelle écriture nous sera utile dans la suite pour faire apparaître des transformées de Fourier rapides (FFT).

Nous aurons également besoin de séparer les variables en θ et en ϕ des Y_ℓ^m et ${}_{\pm 2}Y_\ell^m$ (voir le détail dans l'appendice A page 195) :

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = \lambda_\ell^m(\theta) e^{im\phi} \quad (\text{A.7})$$

$${}_{\pm 2}Y_\ell^m(\theta, \phi) = {}_{\pm 2}\lambda_\ell^m(\theta) e^{im\phi}. \quad (\text{A.8})$$

A.2 Cartes

A.2.1 Cas de la température

Synthèse

Nous avons un spectre de puissance C_ℓ^T et nous voulons construire une carte de température correspondant à ce spectre. Nous commençons pour cela par générer $2\ell + 1$ nombre complexes (les $a_{\ell m}^T$) issus d'une distribution gaussienne de moyenne nulle (puisque nous générons une carte de fluctuations de température) et de variance C_ℓ^T , ceci pour chaque C_ℓ^T . Comme nous l'avons déjà vu précédemment, la température dans une direction \hat{n} est reliée aux $a_{\ell m}^T$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{T}(\hat{n}) &= \sum_{\ell m} a_{\ell m}^T Y_\ell^m(\hat{n}) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\ell=|m|}^{+\infty} a_{\ell m}^T \lambda_\ell^m(\theta) \right) e^{im\phi} \end{aligned}$$

Où l'on a séparé la partie θ de la partie ϕ de Y_ℓ^m . Si on pose :

$$b_m(\theta) = \sum_{\ell=|m|}^{+\infty} a_{\ell m}^T \lambda_\ell^m(\theta), \quad (\text{A.9})$$

on obtient :

$$\frac{\Delta T}{T}(\hat{n}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m(\theta) e^{im\phi} \quad (\text{A.10})$$

Ces formules sont exactes mais elles sont inutilisables en pratique. La pixelisation correspond à un nombre fini de pixels, donc a une taille minimale. Celle-ci est reliée à une valeur maximale de ℓ et de m . On note ℓ_{\max} cette valeur et on prendra $m_{\max} = \ell_{\max} \sim 180/\text{résolution}$. Si la pixelisation est bien choisie (c'est le cas pour la pixelisation ThetaPhi¹ et HEALPix), le calcul de l'Eq. A.10 se fait très facilement par FFT. Il faut pour cela que les pixels de la carte soient répartis régulièrement le long de ϕ à θ fixé.

Pour ce qui est de la synthèse d'une carte de température, on procède donc de la façon suivante :

1. on se donne un spectre de puissance C_ℓ^T ;
2. on en déduit une réalisation des $a_{\ell m}^T$;
3. on calcule les coefficients $b_m(\theta)$ à l'aide de Eq. A.9 ;
4. on calcule enfin la carte de température par FFT des $b_m(\theta)$.

Analyse

Réciproquement, étant donnée une carte de température, on peut en calculer son spectre de puissance C_ℓ^T . On commence par calculer les coefficients du développement

¹ Pixélisation du LAL.

$a_{\ell m}^T$. Pour une carte pixelisée, on transforme :

$$a_{\ell m}^T = \int \frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell}^{m*}(\hat{\mathbf{n}}) d\hat{\mathbf{n}}$$

en

$$a_{\ell m}^T = \frac{4\pi}{N_{\text{pix}}} \sum_{\text{pixels } k} \frac{\Delta T}{T}(\theta_k, \phi_k) \lambda_{\ell}^m(\theta_k) e^{im\phi_k}.$$

Pour chaque valeur de θ_k , on fait la somme sur tous les pixels k' tels que $(\theta_k, \phi_{k'})$. Dans une pixelisation appropriée, on peut à nouveau faire apparaître une FFT :

$$\begin{aligned} a_{\ell m}^T &= \frac{4\pi}{N_{\text{pix}}} \sum_{\theta_k} \sum_{\phi_{k'}} \frac{\Delta T}{T}(\theta_k, \phi_{k'}) e^{im\phi_{k'}} \\ &= \frac{4\pi}{N_{\text{pix}}} \sum_{\theta_k} E_m(\theta_k) \lambda_{\ell}^m(\theta_k) \\ \text{avec } E_m(\theta_k) &= \sum_{\phi_{k'}} \frac{\Delta T}{T}(\theta_k, \phi_{k'}) e^{im\phi_{k'}}. \end{aligned}$$

Comme dans la pixelisation choisie (ThetaPhi ou Healpix par exemple) les pixels sont régulièrement espacés en $\phi_{k'}$ sur les tranches θ_k , les coefficients $E_m(\theta_k)$ se calculent très facilement par FFT.

Remarque :

$$E_m(\theta_k) = b_m(\theta_k) N_{\phi_{k'}}(\theta_k)$$

où $N_{\phi_{k'}}$ est le nombre de pixels sur la tranche θ_k .

Pour analyser une carte de température, on procède donc de la façon suivante :

1. on calcule les coefficients $E_m(\theta_k)$ par FFT de la carte de température ;
2. on calcule la somme donnant les $a_{\ell m}^T$ en fonction des $E_m(\theta_k)$ et des $\lambda_{\ell}^m(\theta_k)$;
3. on calcule ensuite les valeurs moyennes des $a_{\ell m}^T$ pour trouver les C_{ℓ}^T .

A.2.2 Cas de la polarisation

On a besoin ici de deux cartes : une pour Q et une pour U . Le principe est exactement le même que dans le cas de la température, puisque nous disposons également de fonctions orthogonales ${}_{\pm 2}Y_{\ell}^m$. Ces fonctions de base nous sont utiles lorsque nous considérons les deux cartes complexes $Q \pm iU$.

$$(Q \pm iU)(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell m} a_{\pm 2\ell m} {}_{\pm 2}Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{n}})$$

On note $P^{\pm} = Q \pm iU$ et on sépare les variables en définissant ${}_{\pm 2}\lambda_{\ell}^m$ telle que ${}_{\pm 2}Y_{\ell}^m(\theta, \phi) = {}_{\pm 2}\lambda_{\ell}^m(\theta) e^{im\phi}$, c'est-à-dire l'équivalent pour les harmoniques sphériques de spin des fonctions λ_{ℓ}^m pour les harmoniques sphériques scalaires.

Synthèse

Étant donnés deux spectres de puissance C_ℓ^E et C_ℓ^B , nous voulons construire deux cartes d'observables (Q et U) correspondant à ces spectres. Tout d'abord, nous en déduisons deux séquences de nombres aléatoires $a_{\ell m}^E$ et $a_{\ell m}^B$, issus de deux distributions gaussiennes de variances respectives C_ℓ^E et C_ℓ^B . Il est ensuite facile, d'après les Eqs. A.5 et A.6, d'obtenir une réalisation des coefficients $a_{\pm 2\ell m}$. Nous décomposons ensuite $Q \pm iU$ sur ℓ et m :

$$\begin{aligned} Q \pm iU &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\pm 2\ell m} \pm 2\lambda_\ell^m(\theta) e^{im\phi} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\ell=|m|}^{+\infty} a_{\pm 2\ell m} \pm 2\lambda_\ell^m(\theta) \right) e^{im\phi} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m^\pm(\theta) e^{im\phi}, \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$b_m^\pm(\theta) = \sum_{\ell=|m|}^{+\infty} a_{\pm 2\ell m} \pm 2\lambda_\ell^m(\theta).$$

On utilisera encore les propriétés de la pixelisation pour calculer $Q \pm iU$ efficacement par FFT. En pratique, les sommes se limiteront aux valeurs ℓ_{\max} et m_{\max} déterminées par la résolution angulaire.

Pour générer les cartes de polarisation, on va suivre les mêmes étapes que pour la température :

1. on se donne des spectres de puissance pour les champs E et B : C_ℓ^E et C_ℓ^B ;
2. on en déduit une réalisation des coefficients $a_{\ell m}^E$ et $a_{\ell m}^B$;
3. on calcule ensuite les $a_{2\ell m}$ et $a_{-2\ell m}$;
4. on calcule la somme donnant $b_m^\pm(\theta)$;
5. on fait les FFT de $b_m^\pm(\theta)$ pour chaque valeur de θ et on obtient la valeur du champ complexe $Q \pm iU$ en chaque pixel (θ_k, ϕ_k) . On en déduit alors aisément les cartes Q et U .

Analyse

Réciproquement, étant données deux cartes $Q(\hat{\mathbf{n}})$ et $U(\hat{\mathbf{n}})$, nous voulons calculer les spectres de puissance C_ℓ^E et C_ℓ^B . On commence pour cela par calculer les coefficients $a_{\pm 2\ell m}$:

$$a_{\pm 2\ell m} = \int (Q \pm iU)(\hat{\mathbf{n}}) \pm 2Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{n}}) d\hat{\mathbf{n}}.$$

Ce qui donne, en discret :

$$a_{\pm 2\ell m} = \frac{4\pi}{N_{\text{pix}}} \sum_{\text{pixels } k} (Q \pm iU)(\theta_k, \phi_k) \pm 2\lambda_\ell^m(\theta_k) e^{-im\phi_k}$$

On effectue la somme de la même façon que pour la température : pour chaque valeur de θ , on somme sur les ϕ de façon à faire apparaître des FFT.

$$a_{\pm 2\ell m} = \frac{4\pi}{N_{\text{pix}}} \sum_{\theta_k} C_m^{\pm}(\theta_k) {}_{\pm 2}\lambda_{\ell}^m(\theta_k)$$

$$\text{avec } C_m^{\pm}(\theta_k) = \sum_{\phi_{k'}} (Q \pm iU)(\theta_k, \phi_{k'}) e^{-im\phi_{k'}}$$

Le calcul de $C_m^{\pm}(\theta_k)$ se fait très simplement par FFT. Pour analyser deux cartes de polarisation $Q(\hat{\mathbf{n}})$ et $U(\hat{\mathbf{n}})$, on suivra les étapes suivantes :

1. on calcule les coefficients $C_m^{\pm}(\theta_k)$ par FFT sur $\phi_{k'}$ de la carte complexe $(Q \pm iU)(\hat{\mathbf{n}})$;
2. on en déduit les $a_{\pm 2\ell m}$ en faisant la somme sur θ_k de $C_m^{\pm}(\theta_k) {}_{\pm 2}\lambda_{\ell}^m(\theta_k)$;
3. avec les $a_{\pm 2\ell m}$ on calcule facilement les $a_{\ell m}^E$ et $a_{\ell m}^B$;
4. enfin, on en déduit les spectres C_{ℓ}^E et C_{ℓ}^B .

A.3 Conclusions

Les étapes présentées dans cet intermède ne sont pas gourmandes en mémoire ni en temps de calcul. L'analyse et la synthèse de cartes de température et de polarisation ne nécessite que quelques minutes CPU (sur une machine moyenne de type PC-pentium ou DEC-Alpha) tout au plus pour des cartes de quelques centaines de milliers de pixels. Il existe des bibliothèques de calcul de FFT très efficaces². Le principe de la récurrence pour le calcul des λ_{ℓ}^m à été repris sur le code informatique de l'analyse et la synthèse de cartes de température développé par l'équipe de la pixélisation HEALPix³ et a dû être adapté pour l'élargir au cas de la polarisation, c'est-à-dire au calcul des ${}_{\pm 2}\lambda_{\ell}^m$.

² voir par exemple <http://www.fftw.org>

³ voir <http://www.tac.dk/~healpix>

B. LA MESURE DE LA POLARISATION

B.1 Paramètres de Stokes et polarimètres

Le contenu de ce chapitre correspond à la première partie de mon travail de thèse. Les résultats exposés ici ont fait l'objet d'un article¹.

Nous ne pouvons, avec des bolomètres, que mesurer 3 paramètres de Stokes (I , Q et U). La polarisation circulaire ne peut pas être détectée et elle est dégénérée avec I . En toute rigueur, au lieu de mesurer I , nous mesurons $I + V$ mais V est très probablement négligeable devant I ; en particulier, nous avons vu que le CMB ne devait pas avoir de polarisation V puisque la diffusion Thomson ne peut pas en générer. Les avant-plans par contre peuvent en avoir.

Pour mesurer ces 3 quantités, nous devons utiliser au moins 3 polarimètres. Dans les travaux liés à la polarisation du CMB, on suppose en général que les erreurs entre les 3 paramètres de Stokes ne sont pas corrélées. Cette supposition est en général injustifiée car même si les erreurs sur la mesure des polarimètres ne sont pas corrélées d'un polarimètre à l'autre, il n'en est plus de même sur les erreurs sur les paramètres de Stokes. Nous avons trouvé des configurations qui assurent cette décorrélation sur les paramètres de Stokes dans le cas où les erreurs sur les mesures des différents polarimètres sont également décorréliées, avec des erreurs identiques. Ces configurations impliquent en plus que le volume de la boîte d'erreur sur les paramètres de Stokes est minimale.

Nous commençons par nous donner un système de référence dans lequel nous définissons les paramètres de Stokes. Dans ce système de référence, nous repérons l'orientation d'un polarimètre par l'angle $\alpha = (\hat{x}, \vec{u}_\alpha)$, où \vec{u}_α est colinéaire avec le polarimètre. L'intensité détectée par le polarimètre est la moyenne des intensités :

$$m_\alpha = \langle E^2 \cos^2(\alpha - \phi) \rangle = \int_0^{2\pi} E^2 \cos^2(\alpha - \phi) f(E, \phi) dE d\phi$$

où $f(E, \phi)$ est la probabilité pour que le champ électrique de l'onde ait l'amplitude E et fasse un angle ϕ avec \vec{x} . Cette intensité peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} m_\alpha &= \langle E^2 \cos^2(\alpha - \phi) \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2} E^2 (1 + \cos 2\alpha \cos 2\phi + \sin 2\alpha \sin 2\phi) \right\rangle. \end{aligned}$$

Étant données les définitions de Q et U , on peut en déduire que :

$$m_\alpha = \frac{1}{2}(I + Q \cos 2\alpha + U \sin 2\alpha). \quad (\text{B.1})$$

¹ Couchot, F., Delabrouille, J., Kaplan, J. et Revenu, B., (1999), A&A SS, **135**, astro-ph/9807080

Comme les polarimètres ne mesurent que des intensités, on peut ne considérer que des angles α compris entre 0 et π (tourner le polarimètre de π ne change pas sa mesure). Pour séparer les 3 paramètres de Stokes, nous avons besoin d'au moins 3 polarimètres (ou de 1 bolomètre et de 2 polarimètres) séparés d'angles qui ne soient pas multiples de $\pi/2$.

Si l'on utilise n polarimètres avec des séparations angulaires α_p ($1 \leq p \leq n$) alors on obtient le vecteur $S = (I, Q, U)$ en minimisant le χ^2 :

$$\chi^2 = (\mathbf{M} - \mathcal{A}\mathbf{S})^T \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{M} - \mathcal{A}\mathbf{S})$$

où \mathbf{M} est le vecteur des mesures des n polarimètres et \mathcal{A} est la matrice $n \times 3$:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\alpha_1 & \sin 2\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos 2\alpha_p & \sin 2\alpha_p \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos 2\alpha_n & \sin 2\alpha_n \end{bmatrix}.$$

Si l'ensemble de ces polarimètres est tourné d'un angle ψ quelconque, alors la matrice \mathcal{A} se transforme avec une matrice de rotation d'angle 2ψ :

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}\mathbf{R}(\psi)$$

avec

$$\mathbf{R}(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ 0 & -\sin 2\psi & \cos 2\psi \end{bmatrix}.$$

L'estimation des paramètres de Stokes est donnée par :

$$\mathbf{S} = (\mathcal{A}^T \mathbf{N}^{-1} \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{M}$$

et leur matrice de variance \mathbf{V} par :

$$\mathbf{V} = (\mathcal{A}^T \mathbf{N}^{-1} \mathcal{A})^{-1}. \quad (\text{B.2})$$

B.2 Vers des configurations optimisées

B.2.1 Cas idéal

Nous supposons que les n mesures m_p ont des erreurs identiques et décorréées. Dans ce cas, l'élément pq de la matrice de variance s'écrit :

$$\mathbf{N}_{pq} = \langle \delta m_p \delta m_q \rangle = \sigma_0^2 \delta_{pq},$$

le χ^2 est donné par :

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{p=1}^n \left(m_p - \frac{1}{2} (I + Q \cos 2\alpha + U \sin 2\alpha) \right)^2$$

et l'inverse de la matrice de covariance des paramètres de Stokes par :

$$\mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{X},$$

avec

$$\mathbf{X} = \mathcal{A}^T \mathcal{A} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} n & \sum_1^n \cos 2\alpha_p & \sum_1^n \sin 2\alpha_p \\ \sum_1^n \cos 2\alpha_p & \frac{1}{2} (n + \sum_1^n \cos 4\alpha_p) & \frac{1}{2} \sum_1^n \sin 4\alpha_p \\ \sum_1^n \sin 2\alpha_p & \frac{1}{2} \sum_1^n \sin 4\alpha_p & \frac{1}{2} (n - \sum_1^n \cos 4\alpha_p) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Nous voyons que les erreurs sur les paramètres de Stokes sont décorréliées (c'est-à-dire \mathbf{V}^{-1} diagonale) si $S_2 = 0$, avec :

$$S_k = \sum_{p=1}^n e^{ik\alpha_p} = |S_k| e^{i\theta_k}, \quad k \in \{2, 4\}. \quad (\text{B.4})$$

Si les angles α_p sont régulièrement espacés :

$$\alpha_p = \alpha_1 + (p-1) \delta\alpha, \quad p \in \{1, \dots, n\}$$

avec $n \geq 3$, $0 < \delta\alpha < \pi$, $\delta\alpha \neq \pi/2$, alors $S_2 = 0$. Dans ce cas, on a :

$$S_2 = e^{2i\alpha_1} \frac{e^{2in\delta\alpha} - 1}{e^{2i\delta\alpha} - 1}$$

et on assure que $S_2 = 0$ et donc la décorrélation des erreurs par :

$$\delta\alpha = \frac{\pi}{n}, \quad n \geq 3.$$

Avec cette solution, on a automatiquement $S_4 = 0$. La matrice V^{-1} est donc diagonale pourvu que les polarimètres soient régulièrement espacés et couvrent l'angle π . Quant au volume de la boîte d'erreur, il est proportionnel au déterminant de V . Ce volume sera minimum quand le déterminant de X est maximum. Ce dernier s'écrit :

$$\text{Det}(\mathbf{X}) = \frac{1}{256} (n^3 - nr_4^2 - 2r_2^2 (n - r_4 \cos(\theta_4 - 2\theta_2)))$$

où r_4, r_2, θ_4 et θ_2 sont définis dans l'Eq. B.4. S_k est la somme de n nombres complexes de module 1 donc $r_k \leq n$ et :

$$0 \leq \text{Det}(\mathbf{X}) \leq \frac{n^3}{256},$$

cette limite supérieure étant atteinte pour $r_2 = r_4 = 0$. *Les erreurs sur les paramètres de Stokes sont décorréliées et le volume de la boîte d'erreur est minimum si les polarimètres sont régulièrement espacés et couvrent l'angle π .* Cette condition étant supposée remplie, la matrice de variance prend la forme très simple :

$$\mathbf{V}_0 = \sigma_0^2 \mathbf{X}_0^{-1}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{X}_0^{-1} = \frac{4}{n} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

indépendante de l'orientation du plan focal. Les configurations optimisées nous assurent que les erreurs sur les paramètres de Stokes sont décorréliées, que la matrice d'erreur est indépendante de l'orientation du plan focal et le volume de la boîte d'erreur prend sa valeur minimale : $8 \frac{\pi}{3} \left(\frac{4\sigma}{\sqrt{n}} \right)^3$.

La plus petite configuration optimisée consiste à prendre 3 polarimètres espacés de $\pi/3$. Il n'est pas possible de mesurer les paramètres de Stokes avec des erreurs décorréliées

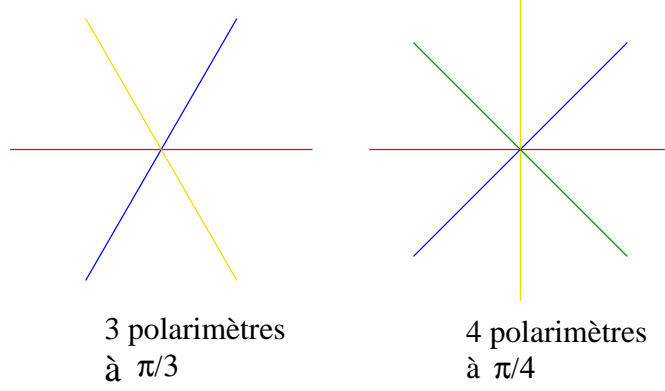


Fig. B.1: **Exemples de configurations optimisées.** Ces configurations ont été retenues pour certains canaux de PLANCK.

avec un détecteur non polarisé et deux polarisés, car dans ce cas les détecteurs polarisés devraient être séparés de $\pi/2$ ce qui ne permet pas de séparer Q et U .

Si l'on combine plusieurs configurations optimisées avec plusieurs détecteurs non polarisés (tous les détecteurs pouvant avoir des niveaux de bruit différents mais n'étant pas corrélés), la matrice de covariance des paramètres de Stokes reste diagonale et indépendante de l'orientation des configurations optimisées. Si l'on a par exemple n_T détecteurs non polarisés et n_P détecteurs polarisés placés dans des configurations optimisées, alors la matrice de covariance s'écrit :

$$\mathbf{V} = \frac{4\sigma_P^2}{n_P} \begin{bmatrix} \left(1 + 4\frac{n_T}{n_P} \left(\frac{\sigma_P}{\sigma_T}\right)^2\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

où σ_P et σ_T sont les niveaux de bruit moyens :

$$\frac{1}{\sigma_T^2} = \left\langle \frac{1}{\sigma_{\text{unpolarised}}^2} \right\rangle \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sigma_P^2} = \left\langle \frac{1}{\sigma_{\text{polarised}}^2} \right\rangle.$$

B.2.2 Cas plus réaliste

En général, les détecteurs n'auront pas exactement les mêmes niveaux de bruit et seront légèrement corrélés. Dans ce cas, la matrice de bruit des mesures peut s'écrire :

$$\mathbf{N} = \sigma^2 (\mathbb{1} + \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}), \quad (\text{B.6})$$

où la matrice de niveaux de bruit $\boldsymbol{\beta}$ et de corrélations $\boldsymbol{\gamma}$ sont données par :

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \beta_{22} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \beta_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{Tr}(\boldsymbol{\beta}) = 0$$

et

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \cdots \\ \gamma_{12} & 0 & \gamma_{23} & \cdots \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Si les matrices β et γ sont petites, on peut les considérer comme étant du premier ordre et donc :

$$\mathbf{N}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} (\mathbb{I} - \beta - \gamma).$$

La matrice de variance des paramètres de Stokes s'obtient à partir de l'Eq. B.2 :

$$\mathbf{V} = \sigma^2 (\mathbf{X}^{-1} + \mathcal{B} + \mathcal{G}),$$

où \mathbf{X} est donnée par l'Eq. B.3 et les corrections au premier ordre \mathcal{B} et \mathcal{G} par :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B} \\ \mathcal{G} \end{pmatrix} = \mathbf{X}^{-1} \mathcal{A}^T \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \mathcal{A} \mathbf{X}^{-1}.$$

Dans une configuration optimisée, \mathbf{X}^{-1} prend la forme \mathbf{X}_0^{-1} donnée dans l'Eq. B.5, et les parties hors diagonale \mathcal{B} et \mathcal{G} restent d'ordre 1 en β et γ . Par exemple, si l'on considère une configuration optimisée avec 3 polarimètres avec le polarimètre 1 aligné sur x (pour ne pas alourdir les notations avec une matrice de rotation), on trouve :

$$\mathcal{B} = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 0 & \beta_{11} & \frac{\beta_{22}-\beta_{33}}{\sqrt{3}} \\ \beta_{11} & \beta_{11} & \frac{\beta_{33}-\beta_{22}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\beta_{22}-\beta_{33}}{\sqrt{3}} & \frac{\beta_{33}-\beta_{22}}{\sqrt{3}} & -\beta_{11} \end{bmatrix},$$

avec $\beta_{22} + \beta_{33} = -\beta_{11}$, et :

$$\mathcal{G} = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} \frac{2(\gamma_{12}+\gamma_{13}+\gamma_{23})}{3} & \frac{\gamma_{12}+\gamma_{13}-2\gamma_{23}}{3} & \frac{\gamma_{12}-\gamma_{13}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\gamma_{12}+\gamma_{13}-2\gamma_{23}}{3} & \frac{2(\gamma_{23}-2\gamma_{12}-2\gamma_{13})}{3} & \frac{2(\gamma_{12}-\gamma_{13})}{\sqrt{3}} \\ \frac{\gamma_{12}-\gamma_{13}}{\sqrt{3}} & \frac{2(\gamma_{12}-\gamma_{13})}{\sqrt{3}} & -2\gamma_{23} \end{bmatrix}.$$

\mathcal{B} et \mathcal{G} se transforment de la façon suivante au cours d'une rotation d'angle ψ du plan focal :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B} \\ \mathcal{G} \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{R}(\psi)^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{B} \\ \mathcal{G} \end{pmatrix} \mathbf{R}(\psi).$$

Tant que β et γ sont petits, \mathbf{V} ne dépend que peu de l'orientation du plan focal.

B.2.3 Superposition de mesures

Dans la plupart des expériences sur le CMB, le plan focal observera à plusieurs reprises un pixel du ciel, parfois avec une orientation différente ; c'est le cas par exemple pour la mission PLANCK, où le plan focal décrit de grands cercles dans le ciel. On regroupe les L mesures d'un point donné. On suppose que le bruit n'est pas corrélé entre ces mesures, et qu'il peut être décrit par une matrice de corrélation entre les polarimètres \mathbf{N}_l pour chaque mesure l du pixel. Sous ces hypothèses, le χ^2 est la somme des χ_l^2 sur les L mesures :

$$\chi^2 = \sum_{l=1}^L (\mathbf{M}_l - \mathcal{A}_l \mathbf{S})^T \mathbf{N}_l^{-1} (\mathbf{M}_l - \mathcal{A}_l \mathbf{S}).$$

Les paramètres de Stokes issus de ce χ^2 sont donnés par :

$$\left(\sum_{l=1}^L \mathcal{A}_l^T \mathbf{N}_l^{-1} \mathcal{A}_l \right)^{-1} \sum_{l=1}^L \mathcal{A}_l^T \mathbf{N}_l^{-1} \mathbf{M}_l,$$

avec une matrice de variance :

$$\mathbf{V} = \left(\sum_{l=1}^L \mathcal{A}_l^T \mathbf{N}_l^{-1} \mathcal{A}_l \right)^{-1}.$$

Cas idéal

Le bruit (que nous supposons blanc) a la même variance pour tous les polarimètres et ceux-ci ne sont pas corrélés. Cette variance peut varier d'une mesure à l'autre, de sorte que l'on a :

$$\mathbf{N}_l = \sigma_l^2 \mathbb{I},$$

et la matrice de variance sur les paramètres de Stokes se simplifie en :

$$\mathbf{V}_L = \left(\sum_{l=1}^L \frac{\mathbf{X}_l}{\sigma_l^2} \right)^{-1} = \left(\sum_{l=1}^L \frac{1}{\sigma_l^2} \mathbf{R}(\psi)^{-1} \mathbf{X}_1 \mathbf{R}(\psi) \right)^{-1}, \quad (\text{B.7})$$

où $\mathbf{X}_l = \mathcal{A}_l^T \mathcal{A}_l$. Dans cette dernière équation, on a écrit explicitement les matrices de rotation qui relient l'orientation du plan focal lors de la mesure l avec son orientation lors de la mesure 1. ψ_l est l'angle de rotation entre les deux positions du plan focal 1 et l . Si les polarimètres sont dans des configurations optimisées, les termes dépendants de l'orientation du plan focal s'éliminent (car $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_l$ sont diagonales) et la matrice de covariance des paramètres de Stokes devient diagonale :

$$\mathbf{V}_{0L} = \frac{4\sigma_L^2}{nL} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{\sigma_L^2}{L} \mathbf{X}_0^{-1}, \quad (\text{B.8})$$

où \mathbf{X}_0 est définie dans l'Eq. B.5 et le niveau de bruit moyen σ_L par :

$$\frac{1}{\sigma_L^2} = \left\langle \frac{1}{\sigma_l^2} \right\rangle.$$

D'après l'Eq. B.8, on retrouve le fait qu'avec L mesures, l'erreur sur les paramètres de Stokes est réduite d'un facteur \sqrt{L} .

Cas plus réaliste

On s'attend à ce que les matrices de bruit soient de la forme donnée dans l'Eq. B.6 :

$$\mathbf{N}_l = \sigma_l^2 (\mathbb{I} + \beta_l + \gamma_l).$$

Si β_l et γ_l sont petites, une inversion au premier ordre nous permet de calculer \mathbf{V} (\mathbf{V}_L est donnée par l'Eq. B.7) :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_L \sum_{l=1}^L \mathcal{A}_l^T \frac{\beta_l + \gamma_l}{\sigma_l^2} \mathcal{A}_l \mathbf{V}_L.$$

Si les polarimètres sont disposés selon une configuration optimisée, alors cette expression se simplifie en :

$$\mathbf{V} = \frac{\sigma_L^2}{L} \left(\mathbf{X}_0^{-1} + \frac{\sigma_L^2}{L} \sum_{l=1}^L \frac{\mathcal{B}_l + \mathcal{G}_l}{\sigma_l^2} \right) = \mathbf{V}_{0L} + \left(\frac{\sigma_L^2}{L} \right)^2 \sum_{l=1}^L \frac{\mathcal{B}_l + \mathcal{G}_l}{\sigma_l^2}, \quad (\text{B.9})$$

avec :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}_l \\ \mathcal{G}_l \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\psi_l)^{-1} \mathbf{X}_0^{-1} \mathcal{A}_1^T \begin{pmatrix} \beta_l \\ \gamma_l \end{pmatrix} \mathcal{A}_1 \mathbf{X}_0^{-1} \mathbf{R}(\psi_l).$$

Le facteur $1/L$ dans la première égalité de l'Eq. B.9 montre que les corrélations et la dépendance dans l'orientation ψ_l du plan focal restent faibles lorsque l'on superpose plusieurs mesures du même pixel.

Selon les hypothèses sur la matrice de bruit des polarimètres ainsi que sur leur disposition relative, on obtient les matrices d'erreur sur les paramètres de Stokes suivantes (avec β_l et γ_l petites) :

matrice de bruit	$\mathbf{N} = \sigma_l^2 \mathbb{1}$	$\mathbf{N} = \sigma_l^2 (\mathbb{1} + \beta_l + \gamma_l)$
configuration optimisée (CO)	$\mathbf{V}_{0L}^{\text{CO}} = \sigma_L^2 \mathbf{X}_0^{-1}$	$\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_{0L}^{\text{CO}} + \left(\frac{\sigma_L^2}{L} \right)^2 \sum_{l=1}^L \frac{\mathcal{B}_l + \mathcal{G}_l}{\sigma_l^2}$
autre configuration (AC)	$\mathbf{V}_L = \left(\sum_{l=1}^L \frac{1}{\sigma_l^2} \mathbf{R}(\psi)^{-1} \times \mathbf{X}_1 \mathbf{R}(\psi) \right)^{-1}$	$\mathbf{V}^{\text{AC}} = \mathbf{V}_L^{\text{AC}} \left(\mathbb{1} + \sum_{l=1}^L \mathcal{A}_l^T \frac{\beta_l + \gamma_l}{\sigma_l^2} \mathcal{A}_l \mathbf{V}_L^{\text{AC}} \right)$

B.2.4 Matrices de corrélation des $a_{\ell m}^E$ et $a_{\ell m}^B$

Nous avons vu précédemment que les champs scalaires E et B ne dépendent pas du système de référence choisi. Cependant, les propriétés des configurations optimisées ne se propagent pas simplement sur la matrice d'erreur des coefficients multipolaires $a_{\ell m}^E$ et $a_{\ell m}^B$. Cela vient du fait que leur définition à partir des paramètres de Stokes n'est pas locale. Cependant, si les erreurs sur les mesures ne sont pas corrélées entre différents points du ciel — ou bien si la corrélation a été supprimée des données² — alors les éléments de la

² ce point fait l'objet de la seconde partie de mon travail de thèse

matrice d'erreur prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\langle \delta a_{\ell m}^{E,B} \delta a_{\ell' m'}^{E,B*} \rangle &= \frac{1}{4} \left(\frac{4\pi}{N_{\text{pix}}} \right)^2 \sum_{\hat{\mathbf{n}}_k} \\
& (\mathbf{N}_{QQ} + \mathbf{N}_{UU})(\hat{\mathbf{n}}_k) [{}_2Y_{\ell}^{m*} {}_2Y_{\ell'}^{m'} + {}_{-2}Y_{\ell}^{m*} {}_{-2}Y_{\ell'}^{m'}](\hat{\mathbf{n}}_k) \\
& \pm (\mathbf{N}_{QQ} - \mathbf{N}_{UU})(\hat{\mathbf{n}}_k) [{}_2Y_{\ell}^{m*} {}_{-2}Y_{\ell'}^{m'} + {}_{-2}Y_{\ell}^{m*} {}_2Y_{\ell'}^{m'}](\hat{\mathbf{n}}_k) \\
& \pm 2i \mathbf{N}_{QU}(\hat{\mathbf{n}}_k) [{}_2Y_{\ell}^{m*} {}_{-2}Y_{\ell'}^{m'} - {}_{-2}Y_{\ell}^{m*} {}_2Y_{\ell'}^{m'}](\hat{\mathbf{n}}_k), \\
\langle \delta a_{\ell m}^E \delta a_{\ell' m'}^{B*} \rangle &= \frac{i}{4} \left(\frac{4\pi}{N_{\text{pix}}} \right)^2 \sum_{\hat{\mathbf{n}}_k} \\
& (\mathbf{N}_{QQ} + \mathbf{N}_{UU})(\hat{\mathbf{n}}_k) [{}_2Y_{\ell}^{m*} {}_2Y_{\ell'}^{m'} - {}_{-2}Y_{\ell}^{m*} {}_{-2}Y_{\ell'}^{m'}](\hat{\mathbf{n}}_k) \\
& - (\mathbf{N}_{QQ} - \mathbf{N}_{UU})(\hat{\mathbf{n}}_k) [{}_2Y_{\ell}^{m*} {}_{-2}Y_{\ell'}^{m'} - {}_{-2}Y_{\ell}^{m*} {}_2Y_{\ell'}^{m'}](\hat{\mathbf{n}}_k) \\
& - 2i \mathbf{N}_{QU}(\hat{\mathbf{n}}_k) [{}_2Y_{\ell}^{m*} {}_{-2}Y_{\ell'}^{m'} + {}_{-2}Y_{\ell}^{m*} {}_2Y_{\ell'}^{m'}](\hat{\mathbf{n}}_k),
\end{aligned}$$

où $\mathbf{N}(\hat{\mathbf{n}}_k)$ est la matrice de bruit des paramètres de Stokes Q et U dans la direction $\hat{\mathbf{n}}_k$ et N_{pix} le nombre de pixels de la carte.

Si les polarimètres sont disposés en configuration optimisée, alors les matrices $\mathbf{N}(\hat{\mathbf{n}}_k)$ sont diagonales (et prennent la forme B.5) et ces formules se simplifient en :

$$\begin{aligned}
\langle \delta a_{\ell m}^{E,B} \delta a_{\ell' m'}^{E,B*} \rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{N_{\text{pix}}} \right)^2 \sum_{\hat{\mathbf{n}}_k} \sigma_{\text{Stokes}}^2(\hat{\mathbf{n}}_k) \\
& \times [{}_2Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{n}}_k)^* {}_2Y_{\ell'}^{m'}(\hat{\mathbf{n}}_k) + {}_{-2}Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{n}}_k)^* {}_{-2}Y_{\ell'}^{m'}(\hat{\mathbf{n}}_k)] \\
\langle \delta a_{\ell m}^E \delta a_{\ell' m'}^{B*} \rangle &= \frac{i}{2} \left(\frac{4\pi}{N_{\text{pix}}} \right)^2 \sum_{\hat{\mathbf{n}}_k} \sigma_{\text{Stokes}}^2(\hat{\mathbf{n}}_k) \\
& \times [{}_2Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{n}}_k)^* {}_2Y_{\ell'}^{m'}(\hat{\mathbf{n}}_k) - {}_{-2}Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{n}}_k)^* {}_{-2}Y_{\ell'}^{m'}(\hat{\mathbf{n}}_k)].
\end{aligned} \tag{B.10}$$

σ_{Stokes} est l'erreur sur les paramètres Q et U dans la direction $\hat{\mathbf{n}}_k$. Si, en plus, σ_{Stokes} est indépendant de la direction (très improbable), alors l'orthogonalité des harmoniques sphériques de spin 2 rend la matrice de corrélations des $a_{\ell m}^{E,B}$ complètement diagonale, ceci dans la limite d'une carte infiniment pixelisée (pour pouvoir utiliser le fait que $\int \sin \theta d\theta d\phi {}_sY_{\ell}^m(\theta, \phi) {}_sY_{\ell'}^{m'*}(\theta, \phi) = \delta_{\ell, \ell'} \delta_{m, m'}$) alors on obtient :

$$\begin{bmatrix} \langle \delta a_{\ell m}^E \delta a_{\ell' m'}^{E*} \rangle & \langle \delta a_{\ell m}^E \delta a_{\ell' m'}^{B*} \rangle \\ \langle \delta a_{\ell m}^B \delta a_{\ell' m'}^{E*} \rangle & \langle \delta a_{\ell m}^B \delta a_{\ell' m'}^{B*} \rangle \end{bmatrix} = \mathbb{1} \frac{4\pi}{N_{\text{pix}}} \sigma_{\text{Stokes}}^2 \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}.$$

B.3 Conclusion

Nous venons de montrer que l'existence de configurations optimisées des polarimètres permettait de minimiser le volume de la boîte d'erreur sur les paramètres de Stokes et d'avoir des erreurs décorréliées. Nous avons vu prédominamment que le signal polarisé du CMB devait être au plus de 10^{-6} K. À ce signal recherché viendront s'ajouter d'autres contributions comme la polarisation de la galaxie par exemple. La connaissance précise des avant-plans polarisés devient un sujet de plus en plus actif : des expériences comme MAP, Archéops, COSMOSOMAS, B2K n'auront pas la sensibilité requise pour atteindre la polarisation du CMB mais fourniront les premières cartes de polarisation qui, elles, seront essentielles lors de l'analyse de données d'expériences plus sensibles, comme PLANCK.

Deuxième partie

LE TRAITEMENT DU BRUIT BASSE FRÉQUENCE

Nous avons étudié dans la première partie le modèle du *Big-Bang*, en particulier le CMB, et avons montré que la cartographie de ses fluctuations permettait de mesurer les paramètres cosmologiques. La mesure de sa polarisation permet également de les mesurer mais en plus de contraindre fortement la période de réionisation (voir page 81) et de mettre en évidence les ondes gravitationnelles primordiales (les perturbations tensorielles de la métrique, engendrées pendant l'inflation). Nous avons également vu qu'il était particulièrement intéressant d'avoir accès aux échelles angulaires les plus petites de manière à avoir accès au maximum de pics Doppler, la mesure des paramètres cosmologiques se faisant notamment en comparant les amplitudes et les positions relatives des pics.

Dans l'intermède B, nous avons eu notre premier contact avec la mesure de la polarisation du rayonnement ; nous avons montré qu'il existait un moyen d'optimiser cette mesure (Couchot et al., 1999). Dans cette deuxième partie, nous allons voir que les détecteurs couramment utilisés dans le domaine des longueurs d'onde millimétriques (le maximum du flux du CMB se trouve autour de 1 mm) génèrent du bruit basse fréquence, ainsi que l'électronique de lecture qui leur est adjointe. Ces dérives basses fréquences altèrent fortement la sensibilité des mesures des fluctuations de température et a fortiori de la polarisation du CMB. Pour cette raison, nous avons mis au point une méthode simple et performante permettant de retirer ces dérives sans perturber le signal astrophysique, dans le cas d'expériences balayant le ciel à l'aide de cercles. À l'origine, ce travail a été conçu pour la mission européenne PLANCK mais le principe de la méthode est très général.

Dans cette deuxième partie, nous allons donc rappeler les principes de base du fonctionnement des détecteurs et voir quels processus sont responsables des dérives basses fréquences. Nous montrerons ensuite que le bruit résultant est trop important pour nous permettre de faire une mesure suffisamment précise pour les fluctuations de température et de polarisation du CMB. En nous limitant au cas des expériences faisant décrire aux détecteurs des cercles sur le ciel, nous montrerons qu'il est possible de retirer les dérives basses fréquences en les modélisant par des fonctions analytiques et en utilisant la redondance de l'information aux intersections entre les cercles. Cette approche nous permet de ne travailler que sur de petites quantités de données plutôt que d'utiliser une méthode classique de maximum de vraisemblance sur la totalité des données. Cette méthode classique n'est d'ailleurs plus envisageable compte-tenu des expériences à venir ou en cours, de plus en plus prolifiques en données. De plus, notre méthode est, à ce jour et à notre connaissance, la seule à traiter le cas des données polarisées.

1. DÉTECTION ET BRUITS

1.1 Principes généraux

Rappelons que les anisotropies du CMB sont de l'ordre de 10^{-5} K. Le signal brut est de l'ordre de quelques degrés K. La plupart des modèles cosmologiques prédisent que le CMB est polarisé à un taux d'une dizaine de pourcents environ : cela signifie que le signal polarisé doit être, au mieux, autour de 10^{-6} K. Nous avons donc besoin de faire une mesure précise sur 6 ou 7 ordres de grandeurs près. Des détecteurs particuliers permettent d'obtenir des mesures aussi précises, ce sont les bolomètres, inventés par Langley en 1880. Ce sont des détecteurs d'intensité, insensibles à la phase du rayonnement incident, à sa fréquence et à sa polarisation ; ce sont les plus performants dans le domaine de la photométrie millimétrique et sub-millimétrique.

Un bolomètre est constitué de divers éléments :

1. un matériau absorbant le rayonnement (en général un cristal de diamant ou de saphir) ;
2. une résistance variable avec la température (du germanium dopé au gallium par exemple) reliée à l'absorbeur ;
3. un réservoir de température ;
4. un lien thermique destiné à dissiper la puissance que reçoit le bolomètre (provenant par exemple de l'ensemble cryogénique ou de l'électronique de lecture du bolomètre).

Il est en général placé dans un cryostat permettant d'atteindre des températures de l'ordre de la dizaine ou de la centaine de mK ; cela permet de réduire de façon considérable le signal parasite et d'augmenter sa sensibilité en diminuant sa chaleur spécifique. En effet, à basse température, la chaleur spécifique d'un semi-conducteur est en général proportionnelle à la température. Une petite variation d'énergie du cristal (c'est-à-dire de l'énergie qu'il reçoit) correspond à une élévation de température d'autant plus grande que sa chaleur spécifique est faible, car $\Delta T \sim \Delta E/C$. Comme de grandes variations de température sont plus faciles à mesurer que de petites, on refroidit les bolomètres.

Le principe de fonctionnement est très simple : pour un bolomètre à semi-conducteur, le rayonnement incident va promouvoir un électron du cristal de la bande de valence à la bande de conduction, ce qui a pour effet de faire varier la résistivité du cristal. Cette différence est mesurable, en mesurant les variations de la différence de potentiel aux bornes du bolomètre en utilisant un courant de polarisation i constant et connu. La variabilité de la résistance du bolomètre avec la température est caractérisée par le paramètre α défini par :

$$\alpha = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT}.$$

α est positif et de l'ordre de 0.5 %/K pour les métaux et négatif et de l'ordre de 5 %/K pour

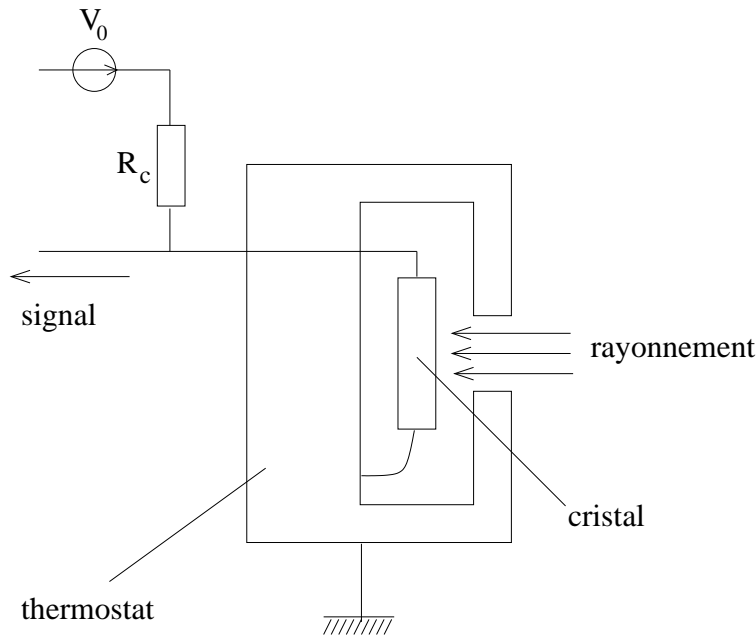


Fig. 1.1: Schéma de principe d'un bolomètre. Le rayonnement incident chauffe le cristal, entraînant une modification de sa résistance. Le courant de polarisation crée par la tension V_0 et la résistance de charge R_c donne une tension qui va varier avec la résistance du cristal, produisant ainsi un signal mesurable.

les semi-conducteurs. Le fait qu'il soit négatif dans ce dernier cas montre que le bolomètre est stable : toute élévation de température entraîne une diminution de la résistance et donc une diminution de la puissance Joule ($\propto Ri^2$) ; le bolomètre s'auto-régule. Plus on s'approche d'une transition supra-conductrice et plus α peut avoir de grandes valeurs, ce qui est souhaitable.

1.2 Bruits

Tout détecteur est soumis à des bruits dont les origines peuvent être très variées. Nous décrirons un peu plus tard quels sont ils et quelles sont leurs propriétés. Començons par quelques rappels mathématiques très généraux sur le bruit.

Tout d'abord, le bruit est une fonction aléatoire dépendant du temps. Nous allons supposer ici que le bruit est stationnaire, c'est-à-dire que les lois de probabilités auxquelles il obéit ne changent pas sous translation dans le temps. Nous ferons également l'hypothèse que le principe ergodique est vérifié. Un signal aléatoire est ergodique si les quantités statistiques moyennées dans le temps d'une portion de ce signal sont identiques aux mêmes quantités déduites d'une moyenne d'ensemble du signal. Cela signifie également que le signal parcourt l'ensemble de l'espace des phases au cours du temps, ou encore qu'une portion temporelle du signal doit prendre toutes les valeurs possibles avec les mêmes probabilités qu'une portion de l'ensemble. L'ergodicité implique la stationnarité.

Nous allons décrire le bruit par une fonction n dépendant du temps et s'ajoutant à la grandeur G que nous cherchons à mesurer. Le bruit perturbe la mesure de telle façon

que :

$$G(t) = \overline{G} + n(t).$$

Les variations de G autour de sa moyenne \overline{G} sont caractérisées par sa variance σ_G^2 et le rapport signal sur bruit est défini par :

$$SNR = \frac{\overline{G}}{\sigma_G} = \frac{\overline{G}}{\sigma_B},$$

où σ_B^2 est la variance du bruit. $d(\sigma_B^2)$ est la puissance de bruit contenue dans la bande de fréquence df et l'on définit la densité spectrale de bruit par :

$$S_n(f) = \frac{d(\sigma_B^2)}{df}.$$

Cette densité spectrale est liée à la fonction d'auto-corrélation du bruit, elle-même définie par :

$$C_{nn}(t) = n(\tau) \otimes n(\tau) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} n(t) n(t + \tau) dt \right).$$

La densité spectrale de puissance est égale à la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation du signal. Un bruit blanc a une densité spectrale constante, sa fonction d'auto-corrélation est la fonction δ de Dirac, signifiant que, pour du bruit blanc, la valeur du bruit à un instant $t + t'$ n'est pas du tout corrélée à celle à l'instant t , ceci quelque soit la valeur de t' . On caractérise l'incidence des bruits sur la mesure par leur NEP ("Noise Equivalent Power"), qui est définie comme étant la puissance nécessaire pour produire un rapport signal sur bruit de 1 pour un temps d'intégration d'une demi-seconde. La NEP se mesure en $\text{W} \cdot \text{Hz}^{-1/2}$. Les valeurs typiques des NEP pour PLANCK sont de l'ordre de $10^{-17} \text{ W} \cdot \text{Hz}^{-1/2}$.

Après ces rappels généraux sur le bruit, voyons quels types de bruits sont présents dans le cas du bolomètre.

Tout d'abord, il existe des bruits fondamentaux, inhérents à toute expérience, quelle qu'elle soit. Dans cette catégorie entre le bruit de photons qui est lié au rayonnement incident ; il s'agit d'un bruit blanc. Il existe aussi le bruit de fluctuation thermique ($\text{NEP} \propto T$), dû aux fluctuations d'énergie associé à la transmission des phonons le long de la conductance thermique du bolomètre. Enfin, le bruit Johnson ($\text{NEP} \propto \sqrt{T}$) est lié à l'agitation thermique des électrons dans les résistances, menant à des fluctuations de tension électrique aux bornes du bolomètre. Le bruit Johnson est blanc. Comme les NEP sont des fonctions croissantes de la température de fonctionnement T du bolomètre, il sera toujours intéressant d'avoir la température la plus faible possible.

D'autres bruits, ayant leur origine dans l'entourage du bolomètre, vont venir s'ajouter. Nous avons vu dans la Fig. 1.1 que la lecture du bolomètre se faisait grâce à un courant de polarisation, généré par un générateur de tension continue auquel on adjoint une grande résistance. Le bruit Johnson que nous venons de décrire n'est pas négligeable dans cette partie du circuit et il convient également de la refroidir. Le processus de refroidissement du bolomètre est soumis à des fluctuations : le bain cryogénique n'est pas parfaitement stable. Le bruit résultant est surtout important aux basses fréquences, il a souvent un spectre proportionnel à l'inverse de la fréquence. Enfin, l'origine du bruit de scintillation,

¹ PLANCK est un satellite européen qui sera lancé en 2007 et qui sera équipé de bolomètres.

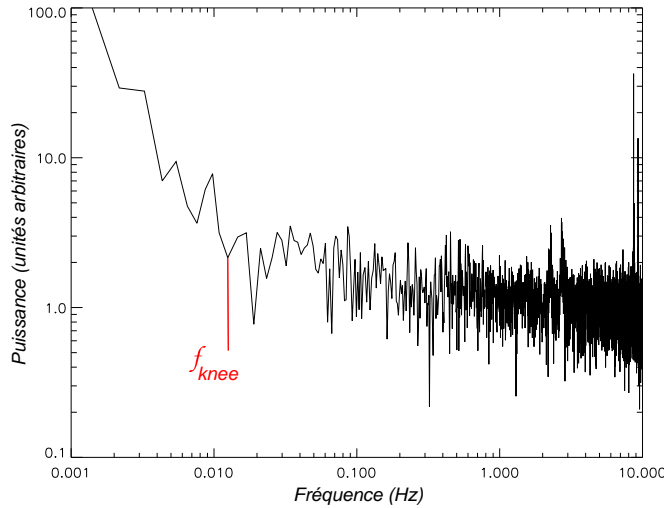


Fig. 1.2: Spectre de puissance typique d'un bolomètre. Spectre de puissance du bolomètre K34 de Caltech aveugle à 100 mK ayant une impédance de 9.6 M Ω (courant de polarisation $i = 0.231$ nA). C'est le premier spectre obtenu qui entre dans les spécifications de PLANCK¹ du point de vue de la stabilité basse fréquence ($f_{\text{knee}} = 0.01$ Hz environ), grâce à un système de filtrage actif et passif des fluctuations de température. Ce spectre est bien approximé par une superposition de bruit blanc (dominant aux grandes fréquences) et de bruit en $1/f^2$. La fréquence genou (f_{knee}) est la fréquence pour laquelle la contribution au spectre du bruit blanc est égale à celle du bruit basse fréquence. Les mesures ont été faites par M. Piat.

que l'on appelle généralement bruit en " $1/f$ ", est encore mal connue. Il semblerait qu'il soit dû aux défauts des connections électriques entre le bolomètre et ses fils électriques. En général, et comme le montre la Fig. 1.2, le bruit du bolomètre est proportionnel aux basses fréquences à une superposition de $1/f^n$, où les n sont positifs. Par exemple, la Fig. 1.3 montre une séquence temporelle de bruit simulé ayant un spectre en $1/f^2$ aux basses fréquences et de bruit blanc aux hautes fréquences. Les dérives basses fréquences sont clairement visibles. La fréquence pour laquelle la contribution au spectre de la partie basse fréquence est égale à celle de la partie bruit blanc est appelée "fréquence genou", que nous noterons à partir de maintenant f_{knee} .

1.3 Alternatives

La présence de bruit étant inévitable, les expérimentateurs ont pensé à différentes façons de minimiser son influence. Pour les expériences spécifiques au CMB, l'intérêt majeur est de mesurer les fluctuations de température de ce rayonnement. Deux "philosophies" ont été adoptées : faire des mesures différentielles ou des mesures en puissance totale. Il n'existe pas de choix idéal, les deux techniques ont leurs points faibles et forts. Nous allons très brièvement comparer ces deux méthodes sur certains points.

Les mesures différentielles ont prouvé leur faisabilité et leur efficacité au début des années 90 avec la mission COBE : le satellite est équipé de deux jeux de miroirs, les plus semblables possibles, avec des plans focaux les plus identiques que possible (voir Fig. 2.5

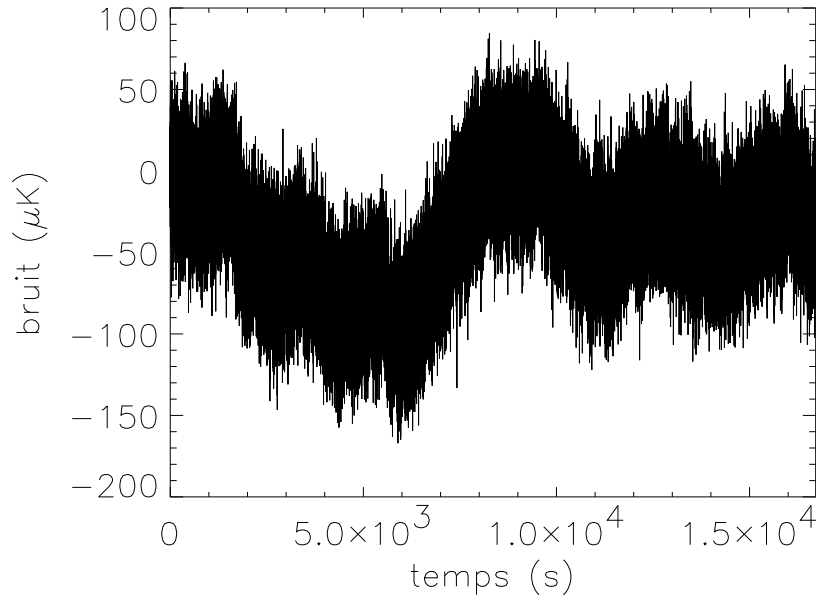


Fig. 1.3: **Séquence temporelle de bruit.** Le spectre de ce bruit est de la forme : $S_n(f) = \sigma^2(1 + (f_{\text{knee}}/f)^2)$, avec $\sigma = 21 \mu\text{K}$ et $f_{\text{knee}} = 0.016 \text{ Hz}$, correspondant à des valeurs réalistes pour les détecteurs de PLANCK.

page 51). L'avantage principal de cette technique est la possibilité de contourner complètement le problème des dérives basses fréquences. En effet, ces dérives, par définition, ne sont importantes que sur des échelles de temps relativement longues. En procédant à des mesures différentielles *instantanées*, le bruit basse fréquence n'a aucune influence sur les données.

Cette technique a bien entendu ses inconvénients. Premièrement, l'encombrement de deux télescopes limite la place disponible pour mettre les détecteurs par rapport à une expérience avec un seul télescope. De plus, le problème du pointage est plus délicat à résoudre lorsque l'on a deux télescopes et donc complique l'analyse de données : par exemple, l'un des télescopes peut observer une région proche du plan galactique tandis que l'autre observe une région propre (du point de vue du CMB) et la température d'un point du ciel ne peut être connue qu'itérativement, seulement après avoir été observé de nombreuses fois (Wright et al., 1996). Le satellite américain MAP¹, dont le lancement est prévu en 2001 fera des mesures différentielles ; il sera équipé de 40 détecteurs.

L'Europe, avec la mission PLANCK², a fait le choix opposé, celui de mesurer la puissance totale venant du ciel. Les raisons de ce choix sont nombreuses. Tout d'abord, le fait d'avoir un seul télescope simplifie considérablement le problème de l'implémentation mécanique d'un système optique. Le plan focal est plus grand que dans le cas de deux télescopes : celui de PLANCK sera équipé de 56 détecteurs basse fréquence (instrument LFI) et de 48 détecteurs haute fréquence (instrument HFI). L'inconvénient majeur est, bien sûr, la présence du bruit basses fréquences. Il faut trouver des méthodes (hardware ou software) pour pouvoir le traiter et le retirer de façon suffisamment efficace. Les mé-

¹ <http://map.gsfc.nasa.gov/>

² <http://astro.estec.esa.nl/SA-general/Projects/Planck/>

thodes que nous avons mises au point pour traiter l'effet de ce bruit pour les données de température (Delabrouille, 1998) et de polarisation (Revenu et al., 2000) ont montré que cela était possible et ont contribué à faire accepter la mission par l'Agence Spatiale Européenne. Nous reviendrons en détails sur ces méthodes.

2. SCANS CIRCULAIRES ET MODÉLISATION DU BRUIT

2.1 Scans circulaires

Toute expérience CMB adopte une stratégie de balayage, c'est-à-dire un choix de déplacement de ses détecteurs sur le ciel. Ces détecteurs décrivent — dans certaines expériences — des cercles, entre autres parce qu'un mouvement circulaire stable est techniquement aisé à réaliser. Le détecteur parcourt ainsi un cercle, la ligne de visée engendre un cône dont l'angle d'ouverture est l'angle entre l'axe de rotation et la ligne de visée. Après avoir fait ses mesures le long d'un cercle, l'axe de rotation du détecteur change de direction, sous l'effet d'un moteur d'entraînement ou de la rotation terrestre par exemple. Selon la résolution angulaire du détecteur, il arrive que plusieurs positions successives de l'axe de rotation corresponde, du point de vue du détecteur, à la même portion de ciel ; c'est le cas lorsque l'angle entre deux positions de l'axe de rotation est plus petit que la résolution angulaire des détecteurs. Pour PLANCK par exemple, la stratégie de balayage est faite dans ce sens : le satellite tourne autour d'une position de son axe de rotation une soixantaine de fois. Les soixante scans individuels obtenus correspondent au même cercle. Puis, l'axe de rotation est déplacé et le satellite fait à nouveau une soixantaine de rotation etc... jusqu'à la fin de la mission. Pour l'expérience COSMOSOMAS (voir page 171) ou l'expérience ballon Archéops, c'est la rotation de la terre qui déplace l'axe de rotation du télescope. Dans le cas de COSMOSOMAS, cette rotation est suffisamment lente par rapport à la résolution angulaire de l'expérience pour pouvoir considérer que 500 scans individuels correspondent au même cercle.

2.2 Superposition de plusieurs scans en un même cercle

Ainsi que nous venons de le voir, plusieurs scans successifs peuvent correspondre, du point de vue du détecteur, à un seul et même cercle. Nous allons étudier le comportement du bruit le long d'un cercle, en l'absence de signal. Nous appellerons “scan” l'ensemble des points de mesure répartis le long d'un cercle résultant d'une rotation unique du détecteur. Il est possible de construire à partir des données le signal le long d'un cercle, en moyennant plusieurs scans : chaque échantillon du cercle est la moyenne arithmétique des échantillons correspondants sur les N scans individuels. Une remarque s'impose ici : cette façon de procéder n'est pas la meilleure, au sens du χ^2 . En effet, considérons l'ensemble des mesures $m(t)$ sur les scans ; nous en avons $N \times n_{\text{ech}}$, où n_{ech} est le nombre d'échantillons par scan. Nous pouvons modéliser ces mesures par :

$$m(t) = A_{t,\phi} s(\phi) + n(t), \quad (2.1)$$

où $A_{t,\phi}$ est la matrice de pointage, de dimension $n_{\text{ech}} \times N n_{\text{ech}}$, $s(\phi)$ est le signal physique constant (il ne dépend donc que de la direction ϕ dans laquelle on regarde) et $n(t)$ une

valeur de bruit dont la matrice de corrélation N est donnée par $N = \langle n n^T \rangle$. Nous extrayons la valeur de $s(\phi)$ à partir des $N \times n_{\text{ech}}$ mesures en minimisant le χ^2 et nous obtenons :

$$s(\phi) = (A_{t,\phi}^T N^{-1} A_{t,\phi})^{-1} A_{t,\phi}^T N^{-1} m(t).$$

Des simulations ont montré que, pour des spectres de bruit pas trop abrupts (avec une remontée aux basses fréquences au pire en $1/f^3$), la moyenne arithmétique simple et la moyenne optimale au sens du χ^2 sont pratiquement équivalentes. Comme la moyenne arithmétique est une opération très simple à mettre en œuvre (elle ne nécessite pas d'inversion de matrices de grandes dimensions comme c'est le cas pour l'autre moyenne) et que le bruit que nous considérons ici le permet, c'est la méthode que nous utiliserons dans la suite.

Le détecteur se déplace à la vitesse angulaire ω , ou encore à la fréquence de f_{spin} tours par seconde, associée à une période T_{spin} . Supposons que le détecteur ait un bruit intrinsèque $n(t)$ dépendant du temps. Soit y la valeur du bruit sur le cercle résultant de la moyenne de N scans ; nous supposons qu'il n'y a pas de signal, ni de bruit synchrone avec la rotation. On repère la position d'un échantillon sur le cercle par sa position angulaire ϕ dans ce cercle. Nous voulons étudier quantitativement l'effet de moyennner les mesures. Pour ce faire, nous allons étudier comment les fréquences temporelles présentes dans le signal brut — c'est-à-dire sur les scans individuels — se transmettent sur les cercles. Nous serons capables d'estimer la corrélation résiduelle entre différents points du cercle. Nous allons voir que le fait de faire une moyenne permet de filtrer une grande partie du bruit et allons caractériser ce qui est transmis et ce qui est filtré. Nous supposons que nous avons une infinité de mesures le long du cercle, c'est-à-dire à tout angle ϕ sur le cercle. Cette hypothèse ne change pas qualitativement les résultats mais elle a le grand avantage de simplifier les calculs (on doit faire des transformées de Fourier continues au lieu de discrètes).

Commençons par écrire la valeur du bruit résiduel moyenné sur le cercle $y(\phi)$, en fonction des bruits individuels $n(t)$ sur chaque scan à la position ϕ par :

$$y(\phi) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} n\left(\frac{\phi}{\omega} + \frac{2k\pi}{\omega}\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} n\left((\phi + 2k\pi)\frac{T_{\text{spin}}}{2\pi}\right).$$

Nous pouvons décomposer cette fonction en série de Fourier :

$$y(\phi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y_m e^{im\phi}$$

où les y_m caractérisent le contenu fréquentiel du bruit sur le cercle. Ce sont ces quantités qu'il nous faut étudier si nous voulons comprendre l'effet sur le bruit de moyennner les scans. Ces modes de Fourier se déduisent du développement de y par :

$$\begin{aligned} y_m &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(\phi) e^{-im\phi} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} n\left((\phi + 2k\pi)\frac{T_{\text{spin}}}{2\pi}\right) e^{-im\phi} d\phi. \end{aligned}$$

De ces équations, il est aisé d'obtenir :

$$y_m = \frac{1}{NT_{\text{spin}}} \int_0^{NT_{\text{spin}}} n(t) e^{-2i\pi m t f_{\text{spin}}} dt. \quad (2.2)$$

La corrélation résiduelle sur le cercle des mesures moyennées peut s'écrire en fonction des y_m :

$$\langle y(\phi) y(\phi') \rangle = \sum_{m, m'} \langle y_m y_{m'}^* \rangle e^{i(m\phi - m'\phi')}, \quad (2.3)$$

les produits $\langle y_m y_{m'}^* \rangle$ se calculant à partir de l'Eq. 2.2 :

$$\langle y_m y_{m'}^* \rangle = \left(\frac{1}{N T_{\text{spin}}} \right)^2 \iint \langle n(t) n(t') \rangle e^{-2i\pi f_{\text{spin}}(mt - m't')} dt dt'.$$

Nous reconnaissons dans cette expression la fonction d'autocorrélation du bruit C_{nn} , que nous remplaçons par la transformée de Fourier du spectre du bruit $S_n(f)$ (voir page 123), ce qui nous permet d'écrire :

$$\langle y_m y_{m'}^* \rangle = \left(\frac{1}{N T_{\text{spin}}} \right)^2 \int_0^{NT_{\text{spin}}} \int_0^{NT_{\text{spin}}} \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f) e^{2i\pi f(t-t')} e^{-2i\pi f_{\text{spin}}(mt - m't')} dt dt' df,$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\langle y_m y_{m'}^* \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f) H(f - m f_{\text{spin}}) H^*(f - m' f_{\text{spin}}) df,$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{1}{N T_{\text{spin}}} \int_0^{N T_{\text{spin}}} e^{2i\pi f t} dt, \\ &= \frac{\sin(\pi f N T_{\text{spin}})}{\pi f N T_{\text{spin}}} e^{i\pi f N T_{\text{spin}}}. \end{aligned}$$

Chacune de ces fonctions est un sinus cardinal modulé par une phase. Sa largeur vaut $1/(N T_{\text{spin}}) = f_{\text{spin}}/N$. La quantité $\langle y_m y_{m'}^* \rangle$ faisant apparaître un produit de deux fonctions H centrées l'une sur $m f_{\text{spin}}$ l'autre sur $m' f_{\text{spin}}$, sa valeur sera d'autant plus grande à N fixé que m sera proche de m' , m et m' étant entiers. Ce sont ces fonctions H qui vont filtrer le bruit. Pour comparer les importances relatives des termes $m = m'$ et $m \neq m'$, on suppose temporairement que le spectre de bruit est constant (bruit blanc). Le calcul donne :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H(f - m f_{\text{spin}}) H^*(f - m' f_{\text{spin}}) df &= \frac{\sin(\pi N(m - m'))}{\pi N^2 T_{\text{spin}}(m - m')} e^{-i\pi N T_{\text{spin}}(m - m') f_{\text{spin}}}, \quad (2.4) \\ &\equiv 0 \quad \text{pour} \quad m \neq m'. \end{aligned}$$

Pour $m = m'$, on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(f - m f_{\text{spin}})|^2 df = \frac{1}{N T_{\text{spin}}}.$$

La corrélation $\langle y(\phi) y(\phi') \rangle$ de l'Eq. 2.3 se réduit donc à la somme sur $m = m'$. Nous pouvons poursuivre le calcul de la corrélation et on obtient finalement, en reprenant le spectre de bruit $S_n(f)$:

$$\begin{aligned} \langle y_m y_{m'}^* \rangle &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f) |H(f - m f_{\text{spin}})|^2 df}_{A(m)} \times \delta_{m, m'} \\ &= A(m) \times \delta_{m, m'}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

On en déduit alors la corrélation dans l'espace réel entre deux mesures le long d'un cercle aux angles ϕ et ϕ' :

$$\langle y(\phi) y(\phi') \rangle = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A(m) e^{im(\phi-\phi')}.$$

Si S_n est constant (cas du bruit blanc), A est indépendant de m et $\langle y(\phi) y(\phi') \rangle \propto \delta_{\phi,\phi'}$: le bruit n'est pas corrélé d'un point à l'autre sur le cercle, il est donc également blanc sur le cercle moyenné. Si S_n dépend de la fréquence (cas du bruit en $1/f^2$ par exemple), $A(m)$ est l'intégrale du spectre pondéré par le carré d'un sinus cardinal centré sur mf_{spin} : dans le cas extrême où N est infini, le sinus cardinal devient une fonction de Dirac et il reste : $A(m) = S_n(mf_{\text{spin}})$. Il faut donc retenir que, qualitativement, $A(m)$ est la moyenne du spectre pondéré par $|H(f - mf_{\text{spin}})|^2$ sur un petit intervalle de fréquence autour de mf_{spin} . La Fig. 2.1 montre qu'il suffit d'intégrer sur une bande de fréquence de largeur $6f_{\text{spin}}/N$ autour de mf_{spin} pour avoir plus de 90 % de la puissance (dans les régions où le spectre de bruit ne varie pas trop vite hors de cette bande). Le filtrage est donc d'autant plus efficace que N est grand, comme on pouvait s'y attendre intuitivement.

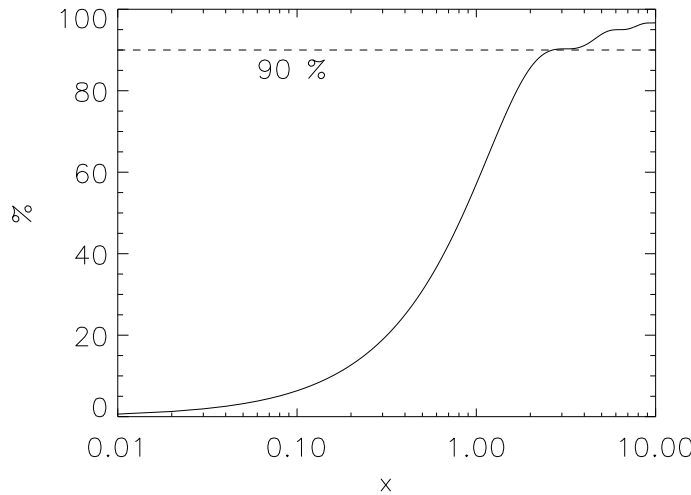


Fig. 2.1: Valeur de $\int_{-x}^x \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$. L'axe des abscisses est la borne de l'intégrale et les ordonnées représentent la valeur de cette intégrale divisée par sa valeur limite, π . Pour $x \sim 2.6$, c'est-à-dire un peu moins que le lobe principal de la fonction, l'intégrale a déjà atteint 90 % de sa valeur limite.

Si nous nous restreignons au cas qui nous intéresse ici, le spectre s'écrit :

$$S_n(f) = \sigma^2 \left(1 + \left(\frac{f_{\text{knee}}}{f} \right)^\alpha \right). \quad (2.6)$$

Pour $f \gg f_{\text{knee}}$, c'est un spectre de bruit blanc de variance σ^2 . Les amplitudes $A(m)$ sont indépendantes de m pour $m \gg f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}$ et ces modes ne contribuent pas à la corrélation $\langle y(\phi) y(\phi') \rangle$. Par contre, pour $m \leq f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}$, les amplitudes $A(m)$ ne sont plus constantes et dépendent de m . Seuls les modes $|m| \leq f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}$ contribuent à la

corrélation $\langle y(\phi) y(\phi') \rangle$, de sorte que nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \langle y(\phi) y(\phi') \rangle &= \sum_{|m| \leq f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}} A(m) e^{im(\phi - \phi')} \\ &= A(0) + 2 \sum_{m=1}^{m \leq f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}} A(m) \cos(m(\phi - \phi')) \quad \text{car} \quad A(-m) = A(m). \end{aligned}$$

Le terme $A(0)$ ne dépend pas de la distance sur le cercle $\phi - \phi'$, correspondant à un niveau constant sur celui-ci, sur lequel s'ajouteront des dérivés résiduelles, dues aux termes d'ordre supérieur en m . Le contenu spectral du bruit moyenné sera donc directement dépendant du rapport $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}$. Par exemple, si ce rapport est plus petit que 1, tous les modes $m \geq 1$ ne fourniront que du bruit blanc, seul le mode $m = 0$ fournira des très basses fréquences, correspondant à un niveau constant. La Fig. 2.2 montre comment varient les

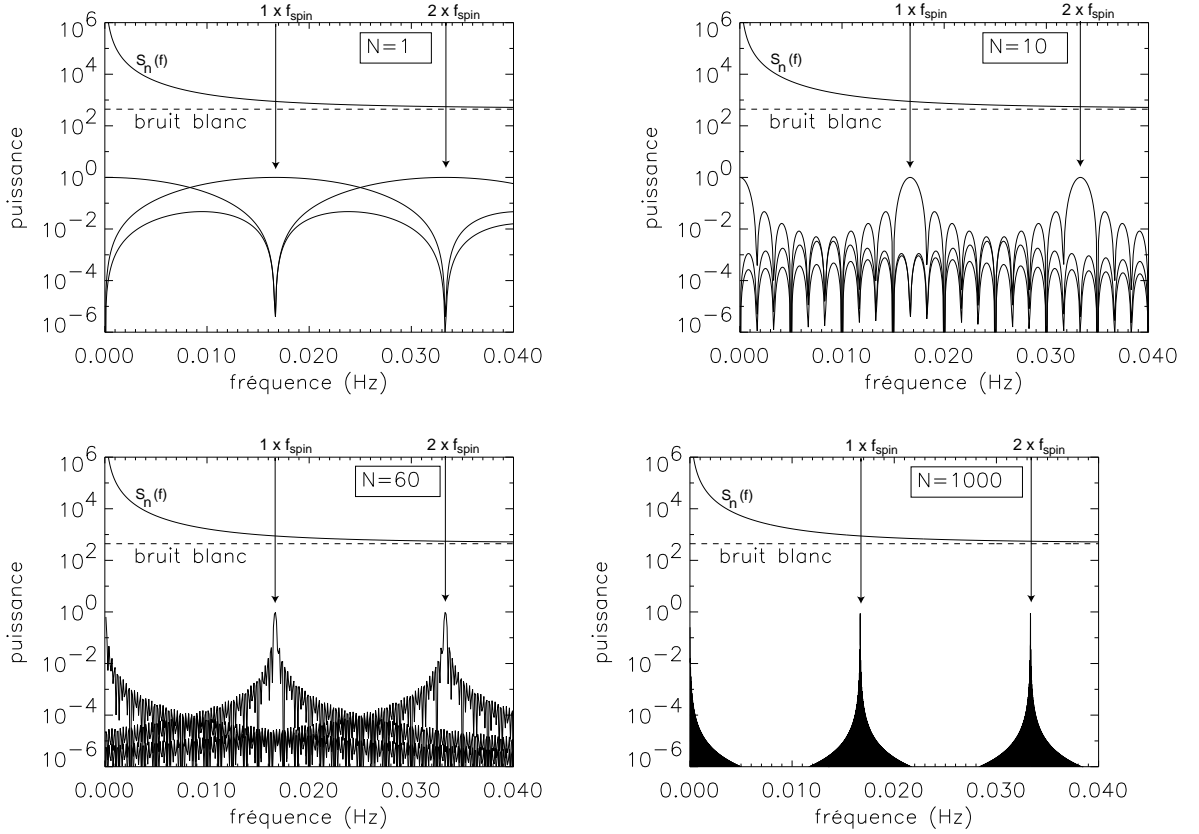


Fig. 2.2: Filtrage du bruit par moyennage. Un bruit de spectre de puissance $S_n(f)$ est filtré lorsque l'on combine N scans individuels en un cercle. Les fréquences transmises sont comprises dans une bande de fréquence de largeur $6f_{\text{spin}}/N$ autour du maximum des fonctions de transfert représentées au bas de chaque figure (voir Eq. 2.5).

$A(m)$, pour différentes valeurs N de scans par cercle et avec $f_{\text{spin}}/f_{\text{knee}}=1$. Chacune de ces figures correspond au même spectre de bruit donné dans l'Eq. 2.6, avec $f_{\text{knee}} = 0.016$ Hz, $\alpha = 2$ et $\sigma = 21$ μ K (courbe du haut). Le comportement de bruit blanc asymptotique aux hautes fréquences est symbolisé par la ligne en tirets dans les 4 figures. On a représenté les 3 premières pondérations $|H(f - mf_{\text{spin}})|^2$ avec $m \in \{0, 1, 2\}$. Le maximum de chacune de ces fonctions vaut 1 et se trouve en $f = mf_{\text{spin}}$. Le terme $m = 0$ engendre un niveau constant sur le cercle moyenné puisqu'il ne laisse passer que les fréquences proches de 0,

le terme $m = 1$ va engendrer des dérives dont les fréquences sont étroitement regroupées autour de f_{spin} etc...

2.3 Modélisation du bruit résiduel sur les cercles

Nous venons de décrire comment le filtrage s'effectuait lorsque l'on moyennait des scans individuels en cercle. Nous avons vu que l'efficacité du filtrage était d'autant plus importante que le nombre de scans par cercle était grand et que le rapport $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}$ était petit. Nous allons vérifier les prédictions que nous avons faites précédemment en regardant comment se traduit le fait de moyenner sur du bruit simulé, en faisant varier d'une part le nombre de scans par cercle N et d'autre part les paramètres du bruit : sa fréquence genou, f_{knee} , et sa puissance à basse fréquence, α .

Ces simulations sont présentées dans les Figs. 2.3 à 2.8. Chacune de ces figures est constituée de deux graphiques :

1. la figure de gauche montre la séquence temporelle de bruit, représentant les valeurs du bruit d'un détecteur pour les $3 \times N$ scans (nous avons choisi de comparer 3 cercles et il y a N scans pour chaque cercle). En abscisse est représenté le temps et en ordonnées le niveau du bruit. L'axe des abscisses est toujours le même sur chaque figure, contrairement à celui des ordonnées ;
2. la figure de droite est la valeur du bruit résiduel sur les cercles après avoir moyenné les N scans : l'axe des abscisses est maintenant celui de la position angulaire le long des cercles ; l'axe des ordonnées est toujours le niveau du bruit.

Nous allons voir que l'allure du bruit résiduel sur les cercles correspond à ce que nous attendons : chaque cercle a une valeur moyenne non nulle (c'est la contribution de l'harmonique 0 du bruit qui est transmise) et présente en plus des dérives de fréquences multiples de f_{spin} plus ou moins pures (selon la valeur de N) et plus ou moins nombreuses (selon la valeur de $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}$). Les cas de bruit que nous pensons réalistes correspondent aux figures 2.4 et 2.6.

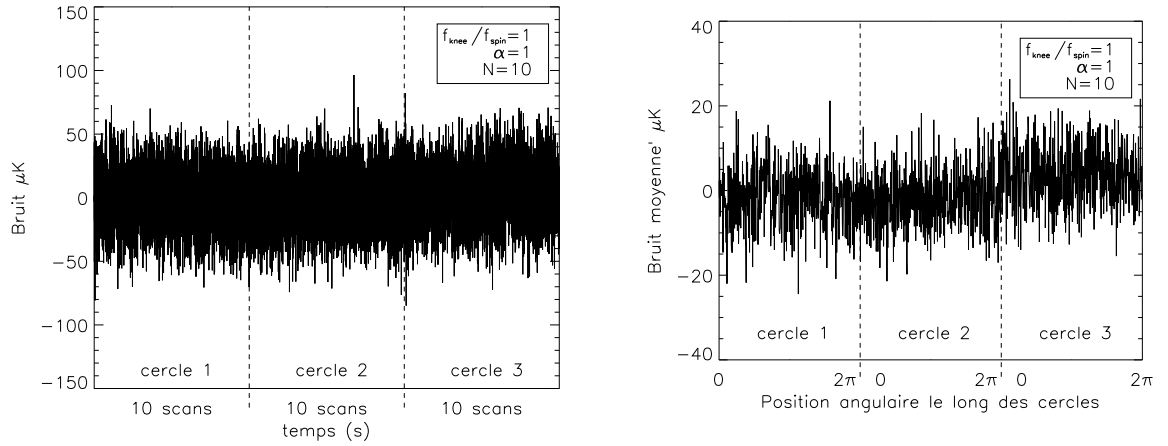


Fig. 2.3: **Des scans aux cercles** : $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}} = 1$, $\alpha = 1$ et $N = 10$. Pour ces paramètres, la forme du bruit moyenné est pratiquement identique à la séquence temporelle de bruit. Le filtrage est assez peu efficace (N est petit).

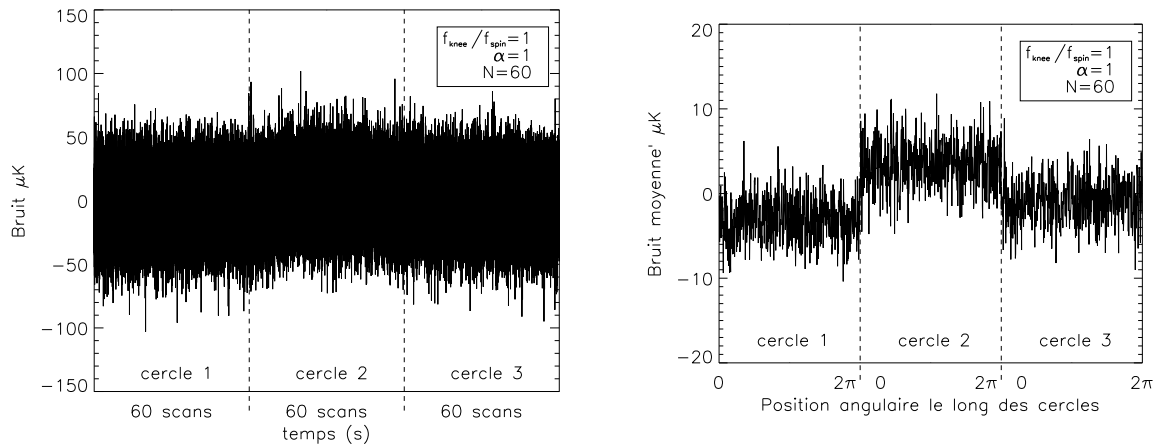


Fig. 2.4: **Des scans aux cercles** : $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}} = 1$, $\alpha = 1$ et $N = 60$. Avec un bruit identique, le nombre de scans par cercle est 6 fois plus grand que celui de la Fig. 2.3 : le filtrage est bien plus efficace et le bruit se moyenne en niveaux de bruits relatifs différents nettement visibles entre les cercles. La dispersion est bien sûr plus petite sur chaque cercle.

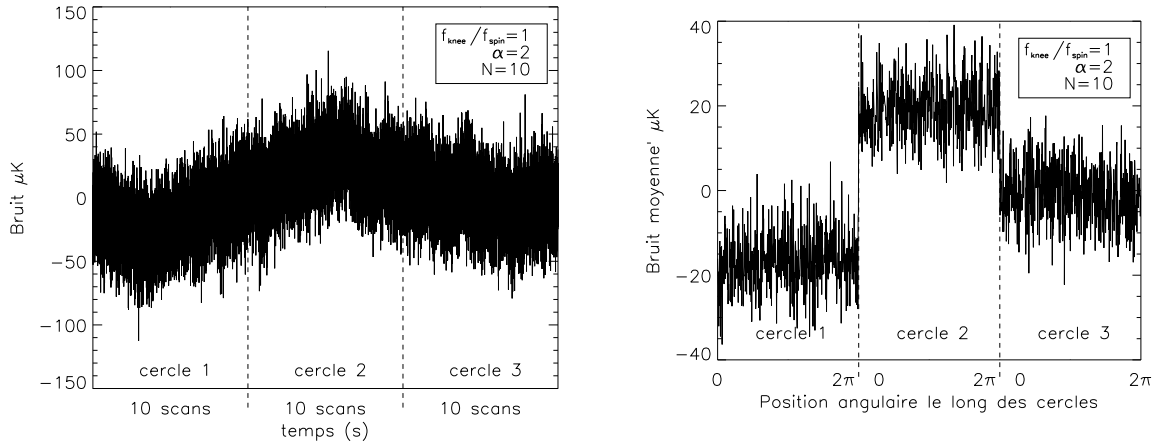


Fig. 2.5: **Des scans aux cercles** : $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}} = 1$, $\alpha = 2$ et $N = 10$. La puissance α du bruit aux basses fréquences est le seul paramètre modifié par rapport à ceux de la Fig. 2.3. Bien que l'on ne moyenne que 10 scans pour obtenir un cercle, le bruit résultant sur les cercles se comporte comme une constante additionnée à du bruit blanc au premier ordre. Les niveaux relatifs moyens des cercles sont ici très différents : ceci est dû au fait que la puissance est plus grande aux basses fréquences que pour du bruit décrit par une puissance $\alpha = 1$.

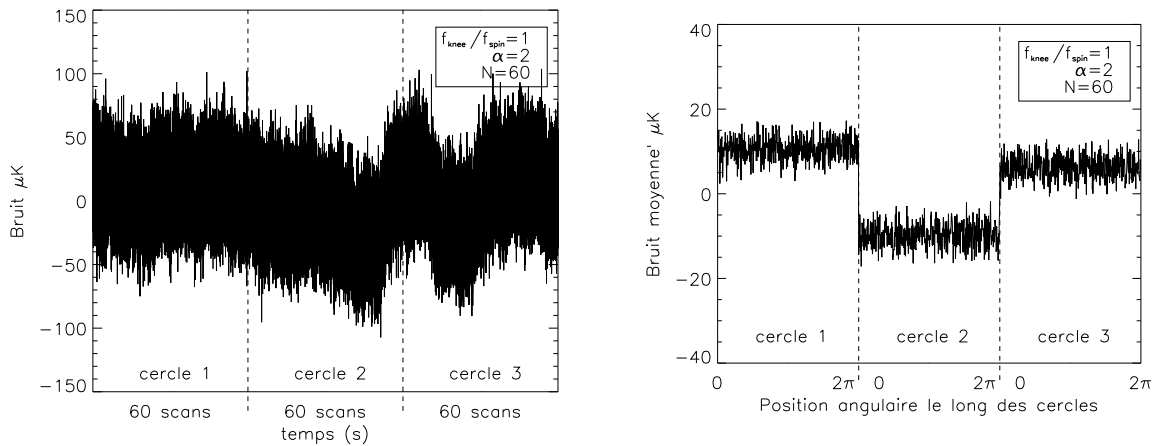


Fig. 2.6: **Des scans aux cercles** : $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}} = 1$, $\alpha = 2$ et $N = 60$. Les paramètres de bruit sont identiques à ceux de la Fig. 2.5. Par contre, on moyenne 60 scans pour un cercle : d'une part la dispersion est naturellement plus petite que dans le cas précédent et d'autre part le bruit moyenné semble aussi plus plat. La raison en est que le filtrage est plus important à cause de la pondération du spectre par des fonctions plus piquées autour de $m f_{\text{spin}}$ (voir Fig. 2.2). Ce cas est assez proche de ce que l'on attend pour PLANCK.

L'étude que nous avons faite sur le comportement du bruit lorsque l'on moyenne N scans en un cercle, et que nous venons de confirmer par des simulations, a démontré qu'il était possible de modéliser le bruit résiduel sur le cercle moyenné. En effet, les dérives parfois violentes des séquences temporelles de bruit que nous avons vues dans les figures précédentes sont beaucoup plus douces sur les cercles, nous permettant de les modéliser aisément.

Au premier ordre, le bruit est une constante, à cause des contributions des très basses

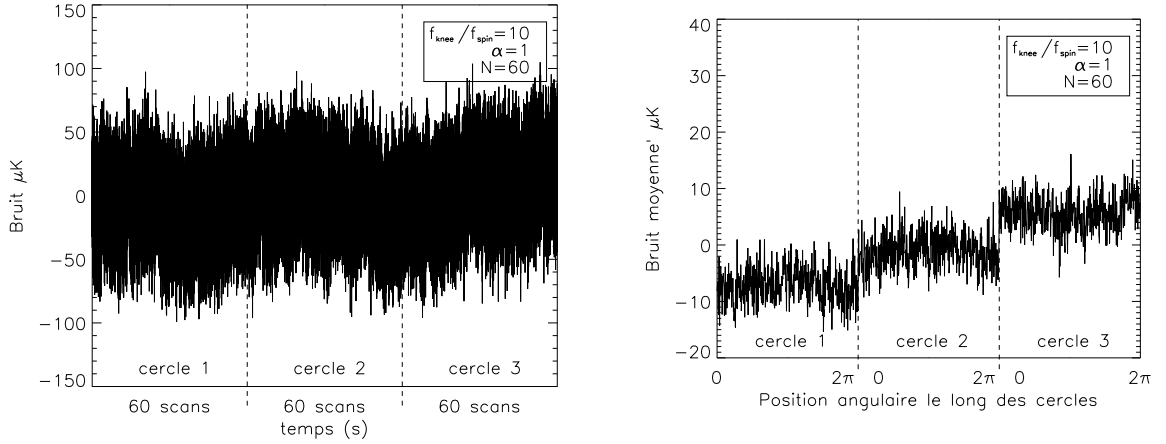


Fig. 2.7: **Des scans aux cercles** : $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}} = 10$, $\alpha = 1$ et $N = 60$. La grande valeur du rapport $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}$ explique l'allure du bruit moyenné sur les cercles. Nous avons vu que le filtrage laisse passer les harmoniques de f_{spin} ; or dans ce cas, le spectre ne peut pas être considéré comme blanc pour des fréquences inférieures à $10 \times f_{\text{spin}}$. Il en résulte, en plus d'un niveau moyen non nul, des dérives résiduelles sur chaque cercle.

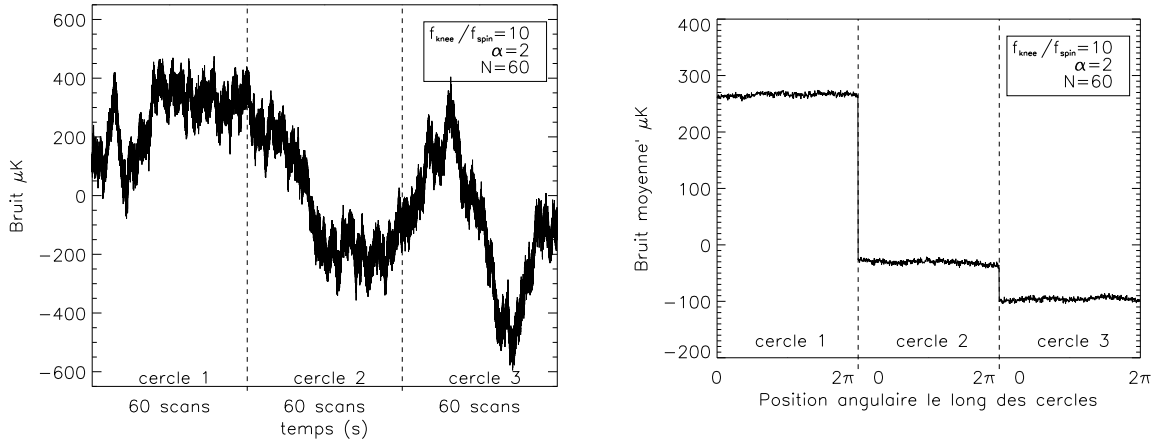
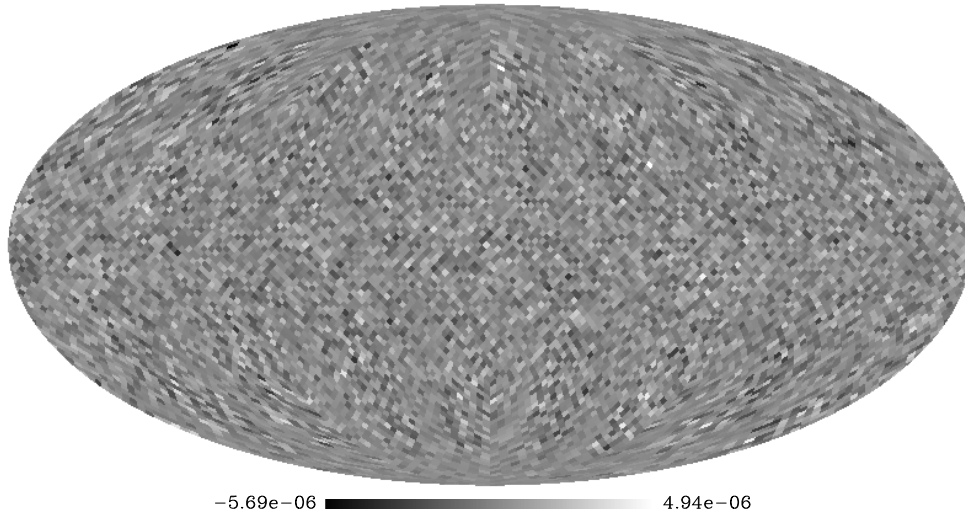


Fig. 2.8: **Des scans aux cercles** : $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}} = 10$, $\alpha = 2$ et $N = 60$. Ce cas extrême montre de nouveau comment fonctionne le filtrage : l'harmonique 0 donne un niveau constant sur chaque cercle ; les harmoniques supérieures donnent des dérives résiduelles le long de chaque cercle.

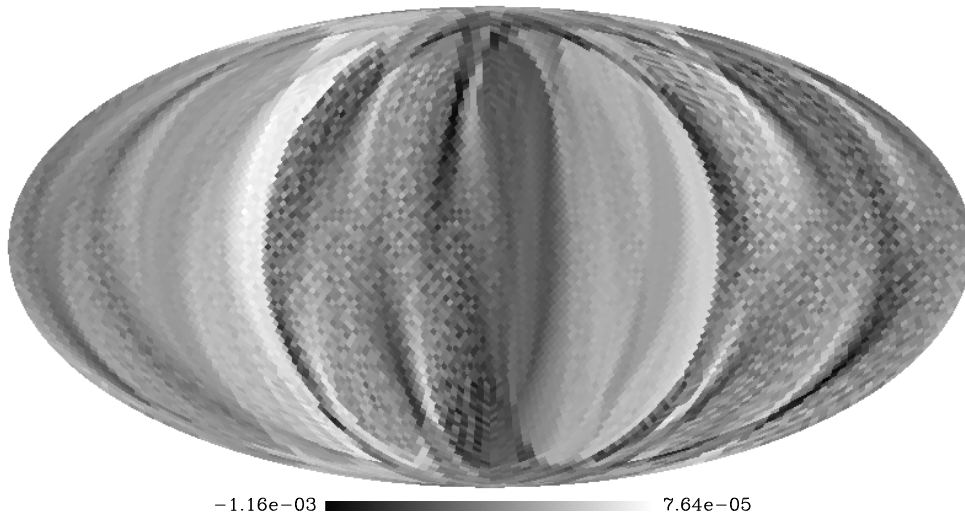
fréquences. Cette approximation, répétons-le, est d'autant meilleure que N est grand et que $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}$ est petit, c'est-à-dire que le filtrage est efficace et qu'il ne laisse passer que les fréquences très faibles, responsables du niveau constant. Le niveau du bruit sur chaque mesure individuelle est celui attendu pour l'expérience PLANCK qui utilise des bolomètres refroidis à 100 mK, il est de l'ordre de $20 \mu\text{K}$, une valeur raisonnable pour PLANCK. Si nous considérons le bruit résiduel, nous constatons que les niveaux relatifs des cercles (prenons par exemple la Fig. 2.6, correspondant au cas de PLANCK) sont distants de quelques dizaines de μK , ce qui est justement l'ordre de grandeur des fluctuations de température du CMB. Il est donc extrêmement difficile de les mesurer avec ce bruit. C'est a fortiori vrai pour sa polarisation. Il est par conséquent nécessaire de soustraire le bruit résiduel sur les cercles moyennés. La Fig. 2.9 illustre ce point : c'est la projection d'un

bruit analogue à celui de la Fig. 2.6. Nous avons simulé une mission avec 60 scans par cercle, nous avons choisi une stratégie de balayage (ici, le détecteur tourne autour d'un axe qui est proche de l'équateur) et nous avons mis ce bruit dans les détecteurs. Les niveaux de bruit différents sur chaque cercle donnent des stries sur la carte.

Nous allons présenter la méthode utilisée pour éliminer les effets du bruit basse fréquence en nous appuyant sur le fait qu'il devient facilement modélisable sur les cercles. Pour être le plus général possible, nous ne ferons aucune hypothèse sur la *forme* que le bruit résiduel prend sur les cercles. Nous voulons être capable d'ajuster n'importe quelle forme de courbe : par exemple une constante (approximation qui suffit tant que N est de quelques dizaines et que $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}} \leq 1$, comme nous le verrons en détails à partir de la page 150), une constante plus quelques sinus et cosinus (pour tenir compte des dérives résiduelles), des polynômes ou même une courbe dont l'expression analytique est inconnue. Nous allons dans un premier temps expliquer la stratégie d'observation, puis quelle est la méthode utilisée pour retirer les dérives basses fréquences.



(a)



(b)

Fig. 2.9: Bruit blanc (figure (a)) et striage (figure (b)). Projection de bruit simulé ayant un spectre de bruit blanc pour la figure de gauche et de la forme $S_n(f) = \sigma^2(1 + (f_{\text{knee}}/f)^2)$ pour la figure de droite avec $\sigma = 21 \mu\text{K}$ et $f_{\text{knee}} = f_{\text{spin}} = 0.016 \text{ Hz}$, proche des paramètres attendus pour PLANCK. L'échelle est en degrés K. Dans cette simulation, le détecteur tourne autour d'un axe qui reste proche de l'équateur ce qui explique la forme des stries. La rms des cartes est de $1 \mu\text{K}$ pour la carte de bruit blanc et de $100 \mu\text{K}$ pour la carte bruitée, supérieure dans ce dernier cas au signal que nous cherchons à mesurer.

3. DESTRIAGE

Le destriage est une méthode permettant de soustraire l'effet des dérives basses fréquences. Elle est très simple sur le principe : elle consiste à exploiter le fait que les détecteurs d'un instrument vont, au cours de la prise de données, observer une même direction du ciel à des moments différents (et sous des points de vue différents) et que le signal provenant de cette direction est constant dans le temps : les différences éventuelles dans les mesures proviennent soit du bruit (qui n'est pas constant dans le temps), soit de l'orientation du détecteur par rapport à la direction observée (important dans le cas de mesures de polarisation, comme nous l'avons vu dans l'Intermède B).

3.1 Principe du destriage

Nous allons appliquer ce principe très général au cas qui nous intéresse. Le destriage tel que nous allons le présenter concerne des expériences dont la stratégie de balayage du ciel consiste à décrire des cercles sur le ciel. Nous allons utiliser deux caractéristiques de l'expérience considérée : le fait qu'il est possible de moyenner plusieurs scans pour en faire un cercle et les intersections entre les cercles. Aux points d'intersection entre les cercles, les détecteurs doivent observer le même signal physique, indépendamment du cercle considéré. La mesure étant constituée de la contribution du signal physique

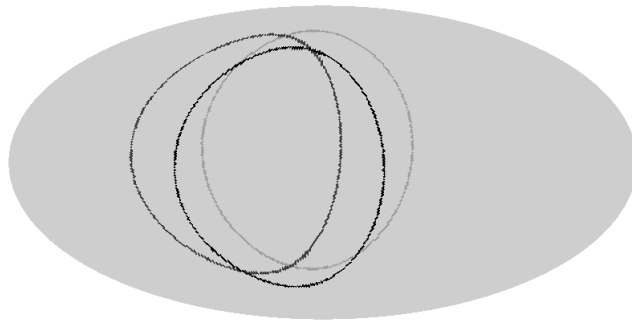


Fig. 3.1: Intersections entre les cercles.

(commun aux deux mesures faites sur chacun des cercles au point d'intersection) et de celle du bruit (différente pour chaque détecteur et aléatoire), il est possible d'estimer la contribution du bruit, et donc de la soustraire. Pour la mesure de température, dire que la contribution du signal est la même dans les deux détecteurs est exact. Par contre, pour la polarisation, le problème est plus compliqué puisque la puissance mesurée dépend de l'orientation du détecteur par rapport à un système de référence donné lié au ciel dans lequel sont définis les paramètres de Stokes (voir Intermède B page 109). Or, en un point d'intersection, les détecteurs sont sur deux cercles différents, ils n'ont donc pas la même

orientation par rapport au ciel. Ceci est illustré par la Fig. 3.2.

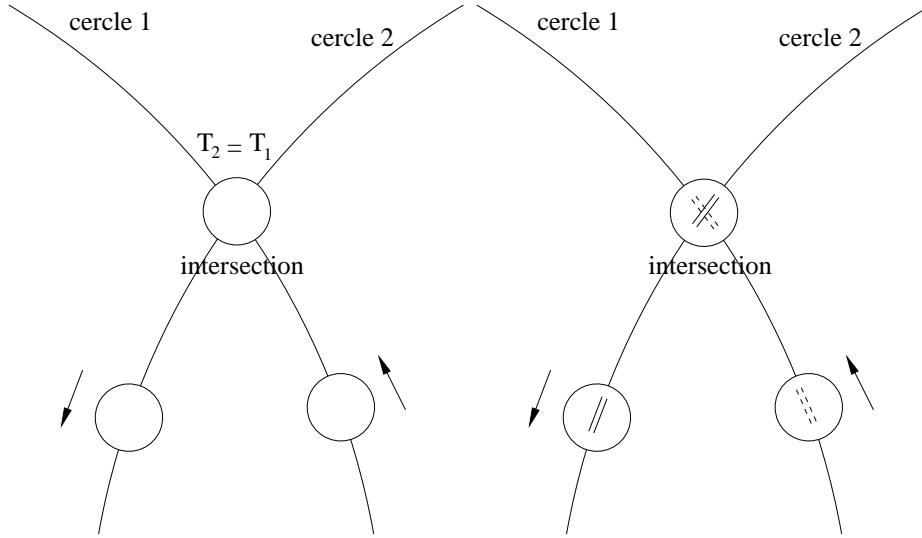


Fig. 3.2: Contraintes aux intersections. Pour les mesures de température (figure de gauche), le fait que signal physique soit le même aux points d'intersection entre deux cercles permet de soustraire l'effet des dérives. Pour la polarisation (figure de droite), la puissance mesurée dépend de l'orientation des polarimètres : bien que les deux polarimètres représentés ici voient le même point d'intersection, leurs mesures différeront à cause du bruit *et* à cause du signal qui n'est pas vu avec la même orientation.

Nous avons vu qu'il fallait se donner un système de référence pour définir les paramètres de Stokes. Le système que nous choisissons est un système *fixe* par rapport au ciel, par exemple le système longitude-latitude galactique. Si nous voulons comparer les mesures faites par des polarimètres regardant dans la même direction du ciel mais avec des orientations différentes, nous devons les exprimer en fonction des paramètres de Stokes définis dans le référentiel fixe. Le modèle de la mesure consiste à exprimer la contribution du signal en fonction de l'orientation du détecteur et de prendre en compte celle du bruit. Le bruit que nous ajoutons est bien entendu celui obtenu après avoir moyenné N scans consécutifs, aisément modélisable par des fonctions simples, comme nous l'avons démontré précédemment. Dans la suite nous allons voir comment calculer analytiquement les intersections entre les cercles. Puis nous exprimerons les mesures de h polarimètres en fonction des paramètres de Stokes définis dans le système de référence fixe. Enfin, en modélisant la contribution du bruit et en combinant les mesures provenant des h polarimètres, nous aurons tous les ingrédients nécessaires pour soustraire efficacement le bruit basses fréquences.

3.2 Géométrie et intersections

Nous allons définir ici les notations liées à la géométrie et aux intersections entre les cercles. Dans un repère orthonormé $(Oxyz)$, on définit un cercle sur la sphère de rayon 1. Ce cercle est décrit par son centre Ω , son angle d'ouverture $\alpha \in [0, \pi/2]$ et sa direction $\hat{\Omega}$ (voir la Fig. 3.3), $\hat{\Omega}$ étant un vecteur unitaire. Ainsi, $\overrightarrow{O\Omega} = \cos \alpha \hat{\Omega}$. On utilisera les coordonnées sphériques θ, ϕ . La direction d'un cercle est caractérisée par un vecteur

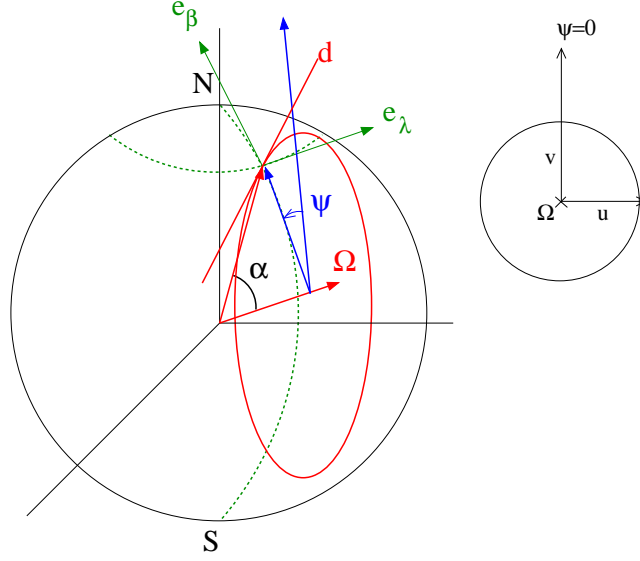


Fig. 3.3: Cercle et géométrie. Notations utilisées pour caractériser un cercle sur la sphère de rayon 1. Les vecteurs e_λ et e_β sont les vecteurs tangents à la sphère et ils forment le système de référence dans lequel les paramètres de Stokes sont définis. ψ est l'angle dans le cercle mesurant la position angulaire d'un point situé sur le cercle ; son origine $\psi = 0$ correspond au point situé le plus au nord dans le cercle. α est l'angle d'ouverture du cercle : c'est l'angle formé par la direction du centre du cercle $\hat{\Omega}$ et le vecteur joignant l'origine O à un point quelconque du cercle. u et v sont deux vecteurs unitaires définis dans le plan du cercle, orthogonaux entre eux, v étant aligné avec l'axe $\psi = 0$. Le vecteur d est un vecteur unitaire tangent au cercle au point défini par ψ .

unitaire $\hat{\Omega}$ pointant dans la direction du centre du cercle :

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

$\hat{\Omega}$ est normal au plan du cercle. Le vecteur unitaire pointant vers un point M de coordonnée ψ dans le cercle a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \sin \theta \cos \phi + \sin \alpha (\sin \phi \sin \psi - \cos \theta \cos \phi \cos \psi) \\ \cos \alpha \sin \theta \sin \phi - \sin \alpha (\cos \phi \sin \psi + \cos \theta \sin \phi \cos \psi) \\ \cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta \cos \psi \end{pmatrix},$$

Le vecteur d de norme 1 et tangent au cercle en M nous servira de référence quand nous considérerons les positions des polarimètres en un point M du cercle ; ses coordonnées sont :

$$d = \begin{pmatrix} \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi \\ -\cos \psi \cos \phi + \sin \psi \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \psi \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs tangents à la sphère en un point $\hat{\Omega}$ sont définis par :

$$\begin{aligned} e_\phi &\hat{=} \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ e_\theta &\hat{=} -\frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \cos \phi \\ -\cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les vecteurs tangents à la sphère e_λ et e_β s'obtiennent en passant des angles (θ, ϕ) aux angles (λ, β) par :

$$\lambda = \phi \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Les vecteurs de base u et v sont, avec ces définitions donnés par :

$$\begin{aligned} u &\equiv e_\phi \quad \text{au point de la sphère } \widehat{\Omega} \\ v &\equiv e_\theta \quad \text{au point de la sphère } \widehat{\Omega}. \end{aligned}$$

Remarquons que u et v sont dans le plan du cercle et que leur point d'application se trouve au centre du cercle, Ω . C'est par rapport à ces vecteurs que nous repérons la position angulaire (angle ψ) d'un point d'intersection dans le cercle.

Nous allons considérer l'intersection entre 2 cercles définis par Ω_k et Ω_ℓ ayant des angles d'ouverture éventuellement différents α_k et α_ℓ .

3.2.1 Conditions d'intersection

Elles sont évidentes quand on se place dans le plan $[\Omega_k, \Omega_\ell]$ (voir Fig. 3.4). Elles

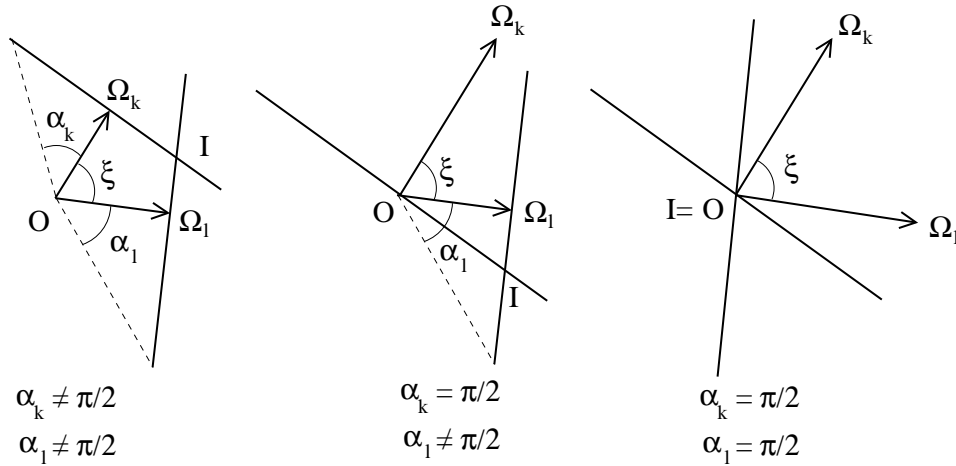


Fig. 3.4: **Conditions d'intersection.** Plan $[\Omega_k, \Omega_\ell]$ vu de dessus. Les cercles se coupent en deux points formant un segment de droite orthogonal au plan $[\Omega_k, \Omega_\ell]$ et dont le milieu est noté I .

s'écrivent, avec $\xi = (\Omega_k, \Omega_\ell)$:

$$\begin{cases} |\alpha_\ell - \alpha_k| \leq \xi \leq \alpha_\ell + \alpha_k \\ \xi \neq 0 \\ \xi \neq \pi. \end{cases}$$

3.2.2 Calcul des angles ψ d'intersection

Le plus simple est de calculer directement les coordonnées des points d'intersection puis de calculer les angles à l'intérieur des cercles. Les deux points d'intersections $\overrightarrow{OM_i}$,

avec $i \in \{1, 2\}$ sont donnés par :

$$\overrightarrow{\text{OM}}_i = \overrightarrow{\text{OI}} + (-1)^i c_{k\ell} \boldsymbol{\Omega}_k \wedge \boldsymbol{\Omega}_\ell = c_k \boldsymbol{\Omega}_k + c_\ell \boldsymbol{\Omega}_\ell + (-1)^i c_{k\ell} \boldsymbol{\Omega}_k \wedge \boldsymbol{\Omega}_\ell$$

Selon les valeurs des angles d'ouverture α_k et α_ℓ des cercles, les coefficients c_k , c_ℓ et $c_{k\ell}$ sont donnés par :

α_k	α_ℓ	$c_k \sin^2 \xi$	$c_\ell \sin^2 \xi$	$c_{k\ell} \sin^2 \xi$
$\leq \frac{\pi}{2}$	$\leq \frac{\pi}{2}$	$\cos \alpha_k - \cos \alpha_\ell \cos \xi$	$\cos \alpha_\ell - \cos \alpha_k \cos \xi$	$\left(\sin^2 \xi - (\cos \alpha_k - \cos \alpha_\ell)^2 - 4 \cos \alpha_k \cos \alpha_\ell \sin^2 \frac{\xi}{2} \right)^{1/2}$
		$\boldsymbol{\Omega}_k$	$\boldsymbol{\Omega}_\ell$	$\boldsymbol{\Omega}_k \wedge \boldsymbol{\Omega}_\ell$

Nous pouvons calculer ensuite aisément les vecteurs $\overrightarrow{\Omega_k \mathbf{M}_i}$ pour en déduire les angles dans les cercles par :

$$\psi_{k,\ell,i} = \begin{cases} \arccos \left(\frac{\overrightarrow{\Omega_k \mathbf{M}_i} \cdot \hat{\mathbf{v}}_k}{\sin \alpha_k} \right) & \text{si } \overrightarrow{\Omega_k \mathbf{M}_i} \cdot \hat{\mathbf{u}}_k \leq 0 \\ 2\pi - \arccos \left(\frac{\overrightarrow{\Omega_k \mathbf{M}_i} \cdot \hat{\mathbf{v}}_k}{\sin \alpha_k} \right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $k < \ell$, l'angle $\psi_{k,\ell,0}$ est celui du point de plus petit angle $\psi \in [0, 2\pi]$ et on a :

$$\overrightarrow{\text{OM}}(\psi_{k,\ell,\delta}) = \overrightarrow{\text{OM}}(\psi_{\ell,k,-\delta})$$

avec $\delta = \pm 1$.

Tous les calculs relatifs à la géométrie ont été programmés en C++ et font partie de la librairie de base pour l'analyse de données dans PLANCK.

3.2.3 Stratégies de balayage et intersections

Selon la stratégie de balayage choisie (ce n'est pas encore définitivement fixé pour PLANCK), la répartition des intersections change, c'est ce qui est représenté dans la Fig. 3.5. La façon dont se répartissent les intersections le long des cercles est primordiale pour le destriage. Il a été proposé de laisser l'axe de rotation de PLANCK dans le plan de l'écliptique de façon à ce que le satellite tourne le dos en permanence au Soleil avec un angle d'ouverture de 90° . Cette solution est intéressante du point de vue de la stabilité thermique mais extrêmement défavorable du point de vue destriage car toutes les intersections se situent aux pôles célestes. On ne pourrait dans ce cas ne fournir de contraintes qu'en deux points de chaque cercle, rendant impossible l'ajustement de fonctions de plus de deux degrés de liberté.

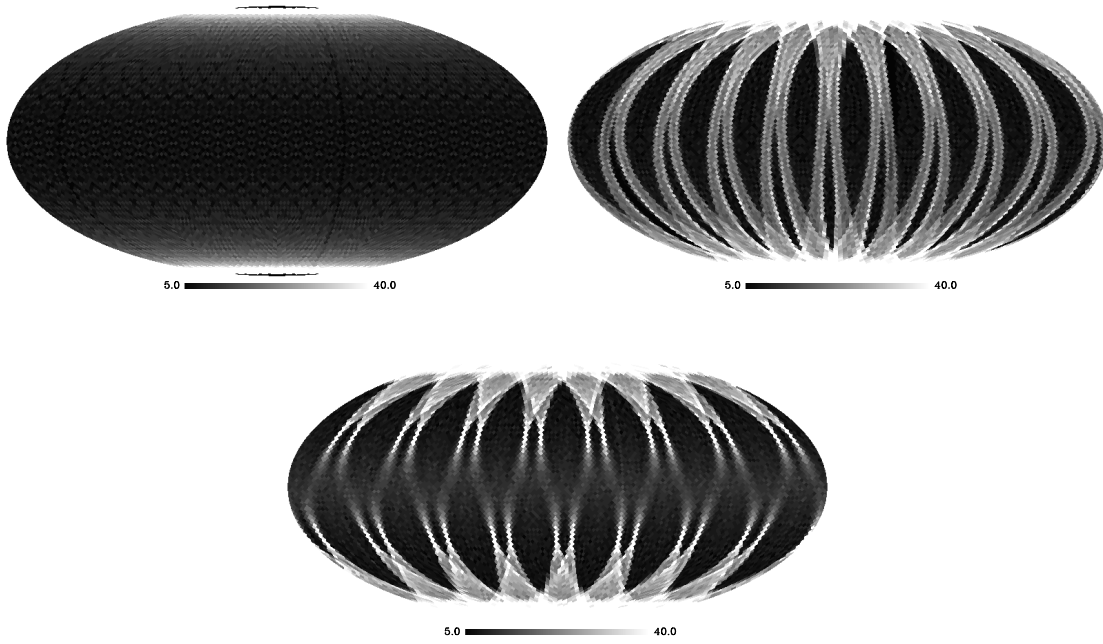


Fig. 3.5: Cartes des intersections. Ces cartes représentent la distribution des intersections entre les cercles pour les trois stratégies de balayage envisagées pour PLANCK : en haut à gauche, l'axe de rotation du satellite est maintenu dans le plan de l'équateur. En haut à droite, il a un mouvement cycloïdal, d'amplitude $\pm 10^\circ$ autour de l'équateur avec 10 oscillations. En bas, le mouvement est sinusoïdal, symétrique autour de l'équateur, d'amplitude $\pm 8^\circ$ avec 8 oscillations. Dans tous ces cas, l'angle d'ouverture est de 85° . L'échelle de niveaux de gris donne le nombre d'intersections ; seule la densité relative des intersections est significative.

3.3 Destriage

3.3.1 Mesure des paramètres de Stokes

Comme nous l'avons déjà vu en détail page 109, la puissance mesurée par un polarimètre p faisant un angle Ψ_p (voir Fig. 3.6) avec l'axe x d'un système de référence par rapport auquel sont définis les paramètres de Stokes I , Q et U est donnée par :

$$\mathbf{M}_{\hat{n}}(p) = \frac{1}{2} (I(\hat{n}) + Q(\hat{n}) \cos \Psi_p(\hat{n}) + U(\hat{n}) \sin \Psi_p(\hat{n})).$$

Puisque nous avons 3 paramètres à mesurer, nous avons besoin d'au moins 3 polarimètres orientés selon des angles différents. Supposons que nous disposions de h polarimètres. Chacun d'eux fait un angle Ψ_p avec le système de référence, avec $p \in \{1, \dots, h\}$. On peut donc grouper les h mesures $\mathbf{M}_{\hat{n}}(p)$ dans un unique h -vecteur $\mathbf{M}_{\hat{n}}$:

$$\mathbf{M}_{\hat{n}} = \mathcal{A}(\hat{n}) \mathbf{S}(\hat{n}),$$

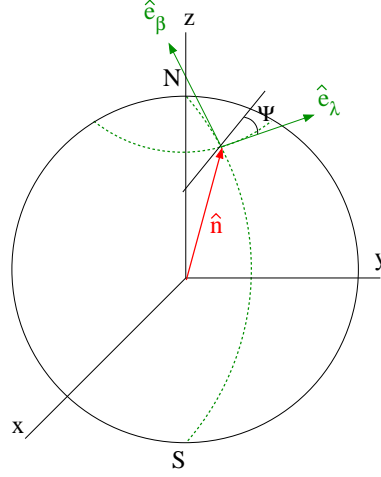


Fig. 3.6: **Système de référence et polarimètre.** En un point \hat{n} de la sphère, la direction du polarimètre (contenue dans le plan $\langle \hat{e}_\lambda, \hat{e}_\beta \rangle$) fait un angle ψ avec la direction de référence \hat{e}_λ du système de référence dans lequel les paramètres de Stokes sont définis.

où

$$\mathbf{S}(\hat{n}) = \begin{pmatrix} I(\hat{n}) \\ Q(\hat{n}) \\ U(\hat{n}) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(\hat{n}) = \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\Psi_1(\hat{n}) & \sin 2\Psi_1(\hat{n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos 2\Psi_p(\hat{n}) & \sin 2\Psi_p(\hat{n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos 2\Psi_h(\hat{n}) & \sin 2\Psi_h(\hat{n}) \end{bmatrix}.$$

Il est possible de factoriser la matrice $\mathcal{A}(\hat{n})$, en introduisant la matrice constante \mathcal{A} , indépendante du point que l'on regarde et la matrice de rotation $\mathbf{R}_{\hat{n}}$:

$$\mathcal{A}(\hat{n}) = \mathcal{A} \mathbf{R}_{\hat{n}}.$$

Dans cette expression, \mathcal{A} représente la configuration géométrique *relative* des polarimètres dans le plan focal, et s'écrit :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos 2\Delta_p & \sin 2\Delta_p \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos 2\Delta_h & \sin 2\Delta_h \end{bmatrix}.$$

Δ_p est l'angle formé par les orientations des polarimètres p et 1 d'où $\Psi_p = \Psi_1 + \Delta_p$ et $\Delta_1 = 0$ (voir Fig. 3.7). Le polarimètre numéro 1 sert de référence dans le plan focal. La matrice $\mathbf{R}_{\hat{n}}$ représente la rotation entre l'image du plan focal sur le ciel — dont l'orientation est déterminée par celle du polarimètre de référence — et le système de référence fixe par rapport au ciel au point \hat{n} :

$$\mathbf{R}_{\hat{n}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\Psi_1(\hat{n}) & \sin 2\Psi_1(\hat{n}) \\ 0 & -\sin 2\Psi_1(\hat{n}) & \cos 2\Psi_1(\hat{n}) \end{bmatrix}.$$

Nous sommes désormais en mesure de relier la contribution du signal aux mesures des

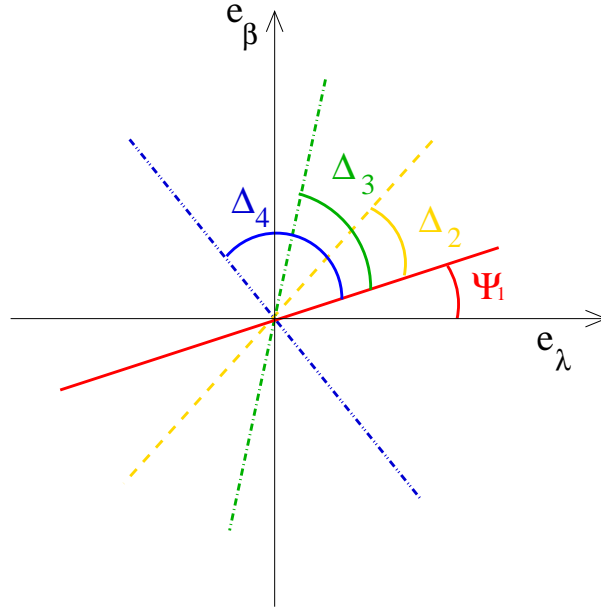


Fig. 3.7: Disposition relative des polarimètres. Le polarimètre 1 faisant un angle Ψ_1 avec l'axe de référence par rapport auquel sont définis les paramètres de Stokes sert de référence. Les orientations des autres polarimètres sont définies *relativement* au polarimètre de référence par les angles Δ_p .

polarimètres :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \cos 2\Delta_2 & \sin 2\Delta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos 2\Delta_h & \sin 2\Delta_h \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} \text{géométrie du plan focal :} \\ \text{distribution des paramètres} \\ \text{de Stokes } \textit{locaux} \\ \text{sur les polarimètres} \end{array} \\
 &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\Psi_1(\hat{\mathbf{n}}) & \sin 2\Psi_1(\hat{\mathbf{n}}) \\ 0 & -\sin 2\Psi_1(\hat{\mathbf{n}}) & \cos 2\Psi_1(\hat{\mathbf{n}}) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} \text{rotation pour avoir} \\ \text{les paramètres de Stokes} \\ \text{dans le plan focal,} \\ \text{dépend de la stratégie} \\ \text{de balayage} \end{array} \\
 &\times \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \end{pmatrix}(\hat{\mathbf{n}}) \longrightarrow \begin{array}{l} \text{paramètres de Stokes} \\ \text{dans le repère fixe} \\ \text{par rapport au ciel} \\ \text{(dépendent de } \hat{\mathbf{n}} \text{)} \end{array}
 \end{aligned}$$

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour mener à bien le destriage. Pour cela, nous considérons une mission ayant n cercles, chaque cercle ayant n_{ech} échantillons et on dispose de h polarimètres, avec $h \geq 3$. L'ensemble des cercles qui coupent un cercle i donné est noté $\mathcal{I}(i)$ et contient $N_{\mathcal{I}(i)}$ cercles. Pour chaque couple de cercles (i, j) , on note les deux points d'intersection (s'ils existent) par $\{i, j, \delta\}$, où i est l'indice du cercle courant, j est l'indice du cercle qui coupe i ($j \in \mathcal{I}(i)$ par définition) et $\delta = \pm 1$ dénombre les deux intersections¹. Les points $\{i, j, \delta\}$ et $\{j, i, -\delta\}$ indiquent la même direction dans le ciel.

¹ Par convention, si $i < j$, $\delta = -1$ correspond au premier point d'intersection sur i tel que $\psi_{i,j,-1} < \psi_{i,j,1}$. Les angles sont dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Les paramètres de Stokes au point $\{i, j, \delta\}$, définis par rapport à un système de référence fixe par rapport au ciel sont rangés dans le 3-vecteur $\mathbf{S}_{i,j,\delta}$ tel que :

$$\mathbf{S}_{i,j,\delta} = \mathbf{S}_{j,i,-\delta} = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \end{pmatrix} (\hat{\mathbf{n}} \equiv \{i, j, \delta\}). \quad (3.1)$$

C'est cette condition qui nous permettra de contraindre les mesures de polarisation aux intersections, afin d'en soustraire le bruit. Avec ces notations, la puissance mesurée par les polarimètres sur le cercle i au point d'intersection $\{i, j, \delta\}$ est donnée par :

$$\mathbf{M}_{i,j,\delta} = \mathcal{A} \mathbf{R}_{i,j,\delta} \mathbf{S}_{i,j,\delta}.$$

3.3.2 L'algorithme

Cas général

Nous allons utiliser une minimisation de χ^2 pour soustraire l'effet des dérives basses fréquences sur les cercles moyennés. Nous avons vu que ce bruit résiduel se modélisait au premier ordre par un niveau constant. Nous allons développer un algorithme général, capable d'ajuster n'importe quelles fonctions f_i^ℓ (analytiques ou non), dont la forme peut être différente pour chaque cercle ; dans ce cas général, on ajustera n_{fit} amplitudes \mathbf{a}_i^ℓ pour chaque cercle i , correspondant aux n_{fit} degrés de liberté des fonctions à ajuster. Pour que le système soit inversible, il faut que le nombre d'intersections par cercle soit au moins égal au nombre de paramètres à ajuster. Le modèle de la mesure s'écrit donc :

$$\mathbf{M}_{i,j,\delta} = \underbrace{\mathcal{A} \mathbf{R}_{i,j,\delta} \mathbf{S}_{i,j,\delta}}_{\text{contribution du signal}} + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n_{\text{fit}}} \mathbf{a}_i^\ell f_i^\ell(\phi_{i,j,\delta})}_{\text{fonction modélisant le bruit résiduel}} + \text{bruit blanc}. \quad (3.2)$$

Nous supposons que le bruit est bien modélisé par les fonctions f_i^ℓ plus du bruit blanc décrit par une matrice de corrélation \mathbf{N}_i de dimensions $h \times h$ entre les polarimètres et *constante* sur chaque cercle. Précisons que les bruits synchrones avec la rotation ne peuvent pas, *par nature*, être supprimés par le destriage puisque cette méthode le confond avec le signal sur le ciel (qui est lui aussi synchrone avec la rotation).

Le χ^2 s'écrit donc :

$$\chi^2 = \sum_{i,j \in \mathcal{I}(i), \delta = \pm 1} \left(\mathbf{M}_{i,j,\delta} - \mathcal{A} \mathbf{R}_{i,j,\delta} \mathbf{S}_{i,j,\delta} - \sum_{\ell=1}^{n_{\text{fit}}} \mathbf{a}_i^\ell f_i^\ell(\phi_{i,j,\delta}) \right)^T \times \mathbf{N}_i^{-1} \left(\mathbf{M}_{i,j,\delta} - \mathcal{A} \mathbf{R}_{i,j,\delta} \mathbf{S}_{i,j,\delta} - \sum_{\ell=1}^{n_{\text{fit}}} \mathbf{a}_i^\ell f_i^\ell(\phi_{i,j,\delta}) \right) \quad (3.3)$$

Lorsque l'on minimise ce χ^2 par rapport à $\mathbf{S}_{i,j,\delta}$ en ajoutant la condition d'intersection $\mathbf{S}_{i,j,\delta} = \mathbf{S}_{j,i,-\delta}$ (Eq. 3.1), on trouve l'équation suivante :

$$\mathbf{R}_{i,j,\delta}^{-1} \mathcal{A}^T \mathbf{N}_i^{-1} \left(\mathbf{M}_{i,j,\delta} - \mathcal{A} \mathbf{R}_{i,j,\delta} \mathbf{S}_{i,j,\delta} - \sum_{\ell=1}^{n_{\text{fit}}} \mathbf{a}_i^\ell f_i^\ell(\phi_{i,j,\delta}) \right) + \mathbf{R}_{j,i,-\delta}^{-1} \mathcal{A}^T \mathbf{N}_j^{-1} \left(\mathbf{M}_{j,i,-\delta} - \mathcal{A} \mathbf{R}_{j,i,-\delta} \mathbf{S}_{i,j,\delta} - \sum_{\ell=1}^{n_{\text{fit}}} \mathbf{a}_j^\ell f_j^\ell(\phi_{j,i,-\delta}) \right) = 0. \quad (3.4)$$

De même, la minimisation par rapport aux \mathbf{a}_i^ℓ mène à :

$$\sum_{j \in \mathcal{I}(i), \delta = \pm 1} f_i^\ell(\phi_{i,j,\delta}) \mathbf{N}_i^{-1} \left(\mathbf{M}_{i,j,\delta} - \mathcal{A} \mathbf{R}_{i,j,\delta} \mathbf{S}_{i,j,\delta} - \sum_{\ell=1}^{n_{\text{fit}}} \mathbf{a}_i^\ell f_i^\ell(\phi_{i,j,\delta}) \right) = 0. \quad (3.5)$$

Il est très utile à ce niveau de travailler avec de nouvelles variables réduites (\mathbf{S} et $\tilde{\mathbf{a}}_i^\ell$) plutôt que de conserver les variables initiales (\mathbf{M} et \mathbf{a}_i^ℓ) ; ces nouvelles variables sont définies par :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i &= \mathcal{A}^T \mathbf{N}_i^{-1} \mathcal{A} \\ \mathbf{S}_{i,j,\delta} &= \mathbf{X}_i^{-1} \mathcal{A}^T \mathbf{N}_i^{-1} \mathbf{M}_{i,j,\delta} \\ \tilde{\mathbf{a}}_i^\ell &= \mathbf{X}_i^{-1} \mathcal{A}^T \mathbf{N}_i^{-1} \mathbf{a}_i^\ell ; \end{aligned} \quad (3.6)$$

la matrice \mathbf{X}_i est la matrice de variance des paramètres de Stokes sur le cercle i . La quantité $\mathbf{S}_{i,j,\delta}$ est un 3-vecteur et peut être interprétée comme la valeur des paramètres de Stokes définis dans le *repère local*, lié à l'image sur le ciel du plan focal où la direction du polarimètre de référence coïncide avec le système de référence fixe. Notons que la quantité $\tilde{\mathbf{a}}_i^\ell$ est un $(3 \times n \times n_{\text{fit}})$ -vecteur, alors que \mathbf{a}_i^ℓ est un $(h \times n \times n_{\text{fit}})$ -vecteur. Avec ces variables réduites, les Eqs. 3.4 et 3.5 deviennent respectivement :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{i,j,\delta}^{-1} \mathbf{X}_i \left(\mathbf{S}_{i,j,\delta} - \sum_{\ell=1}^{n_{\text{fit}}} \tilde{\mathbf{a}}_i^\ell f_i^\ell(\phi_{i,j,\delta}) - \mathbf{R}_{i,j,\delta} \mathbf{S}_{i,j,\delta} \right) + \\ \mathbf{R}_{j,i,-\delta}^{-1} \mathbf{X}_j \left(\mathbf{S}_{j,i,-\delta} - \sum_{\ell=1}^{n_{\text{fit}}} \tilde{\mathbf{a}}_j^\ell f_j^\ell(\phi_{j,i,-\delta}) - \mathbf{R}_{j,i,-\delta} \mathbf{S}_{i,j,\delta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

et :

$$\sum_{j \in \mathcal{I}(i), \delta = \pm 1} f_i^\ell(\phi_{i,j,\delta}) \left(\mathbf{S}_{i,j,\delta} - \sum_{\ell=1}^{n_{\text{fit}}} \tilde{\mathbf{a}}_i^\ell f_i^\ell(\phi_{i,j,\delta}) - \mathbf{R}_{i,j,\delta} \mathbf{S}_{i,j,\delta} \right) = 0. \quad (3.8)$$

On résoud ensuite l'Eq. 3.7 pour la variable $\mathbf{R}_{i,j,\delta} \mathbf{S}_{i,j,\delta}$ et on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{i,j,\delta} \mathbf{S}_{i,j,\delta} &= \left(\mathbb{1} + \mathbf{X}_i^{-1} \tilde{\mathbf{R}}(i, j, \delta) \mathbf{X}_j \tilde{\mathbf{R}}(i, j, \delta)^{-1} \right)^{-1} \times \\ &\left[\mathbf{S}_{i,j,\delta} - \sum_{\ell=1}^{n_{\text{fit}}} \tilde{\mathbf{a}}_i^\ell f_i^\ell(\phi_{i,j,\delta}) + \mathbf{X}_i^{-1} \tilde{\mathbf{R}}(i, j, \delta) \mathbf{X}_j \left(\mathbf{S}_{j,i,-\delta} - \sum_{\ell=1}^{n_{\text{fit}}} \tilde{\mathbf{a}}_j^\ell f_j^\ell(\phi_{j,i,-\delta}) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}(i, j, \delta) &= \mathbf{R}_{i,j,\delta} \mathbf{R}_{j,i,-\delta}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\delta_\Psi(i, j, \delta) & \sin 2\delta_\Psi(i, j, \delta) \\ 0 & -\sin 2\delta_\Psi(i, j, \delta) & \cos 2\delta_\Psi(i, j, \delta) \end{bmatrix}, \\ \text{avec } \delta_\Psi(i, j, \delta) &= \Psi_1(i, j, \delta) - \Psi_1(j, i, -\delta). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Cette matrice de rotation fait tourner le repère du plan focal depuis sa position sur le cercle j au point $\{i, j, \delta\}$ à sa position sur le cercle i au même point (rappelons que les points $\{i, j, \delta\}$ et $\{j, i, -\delta\}$ sont identiques). Nous voyons que $\tilde{\mathbf{R}}(i, j, \delta) = \tilde{\mathbf{R}}(j, i, -\delta)^{-1}$. Muni de la nouvelle expression de $\mathbf{R}_{i,j,\delta} \mathbf{S}_{i,j,\delta}$, on la remplace dans l'Eq. 3.8 pour aboutir

à :

$$\sum_{j \in \mathcal{I}(i), \delta = \pm 1} f_i^\ell(\phi_{i,j,\delta}) \left[\left(\mathbb{1} - \Lambda_{i,j,\delta}^{-1} \right) \left(\mathbf{s}_{i,j,\delta} - \sum_{\ell'=1}^{n_{\text{fit}}} \tilde{\mathbf{a}}_i^{\ell'} f_i^{\ell'}(\phi_{i,j,\delta}) \right) - \Lambda_{i,j,\delta}^{-1} \mathbf{X}_i^{-1} \tilde{\mathbf{R}}(i,j,\delta) \mathbf{X}_j \left(\mathbf{s}_{j,i,-\delta} - \sum_{\ell'=1}^{n_{\text{fit}}} \tilde{\mathbf{a}}_j^{\ell'} f_j^{\ell'}(\phi_{j,i,-\delta}) \right) \right] = 0, \quad (3.11)$$

où l'on a posé :

$$\Lambda_{i,j,\delta} = \mathbb{1} + \mathbf{X}_i^{-1} \tilde{\mathbf{R}}(i,j,\delta) \mathbf{X}_j \tilde{\mathbf{R}}(i,j,\delta)^{-1}.$$

Utilisant le fait que² :

$$\mathbb{1} - \Lambda_{i,j,\delta}^{-1} = \left(\mathbb{1} + \mathbf{X}_i^{-1} \tilde{\mathbf{R}}(i,j,\delta) \mathbf{X}_j \tilde{\mathbf{R}}(i,j,\delta)^{-1} \right)^{-1} \mathbf{X}_i^{-1} \tilde{\mathbf{R}}(i,j,\delta) \mathbf{X}_j \tilde{\mathbf{R}}(i,j,\delta)^{-1},$$

on peut factoriser l'Eq. 3.11 et la mettre sous la forme définitive :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{I}(i), \delta = \pm 1} f_i^\ell(\phi_{i,j,\delta}) \left(\mathbb{1} + \tilde{\mathbf{R}}(i,j,\delta) \mathbf{X}_j^{-1} \tilde{\mathbf{R}}(i,j,\delta) \mathbf{X}_i \right)^{-1} \times \\ \sum_{\ell'=1}^{n_{\text{fit}}} \left[\tilde{\mathbf{a}}_i^{\ell'} f_i^{\ell'}(\phi_{i,j,\delta}) - \tilde{\mathbf{R}}(i,j,\delta) \tilde{\mathbf{a}}_j^{\ell'} f_j^{\ell'}(\phi_{j,i,-\delta}) \right] = \\ \sum_{j \in \mathcal{I}(i), \delta = \pm 1} f_i^\ell(\phi_{i,j,\delta}) \left(\mathbb{1} + \tilde{\mathbf{R}}(i,j,\delta) \mathbf{X}_j^{-1} \tilde{\mathbf{R}}(i,j,\delta) \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(\mathbf{s}_{i,j,\delta} - \tilde{\mathbf{R}}(i,j,\delta) \mathbf{s}_{j,i,-\delta} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Il suffit de résoudre ce système linéaire afin d'estimer les $3 \times n \times n_{\text{fit}}$ amplitudes $\tilde{\mathbf{a}}_i^\ell$. La matrice obtenue a pour dimensions $(3 \times n \times n_{\text{fit}}) \times (3 \times n \times n_{\text{fit}})$, puisque i varie de 1 à n , le nombre total de cercles.

Remarque : nous avons besoin des valeurs locales des paramètres de Stokes (c'est-à-dire dans le système de référence lié à l'image du plan focal sur le ciel) au point caractérisé par son angle $\psi_{i,j,\delta}$ sur le cercle i et au point correspondant d'angle $\psi_{j,i,-\delta}$ sur le cercle j . Or les mesures faites sur ces cercles correspondent à des positions angulaires régulièrement espacées et il est très improbable que le point d'intersection $\{i,j,\delta\}$ coïncide avec le centre d'une mesure sur ces cercles. Nous avons besoin d'estimer le signal le long du cercle en chaque point. Pour cela, nous avons pris soin d'interpoler les mesures en des positions angulaires *quelconques* sur le cercle. Nous avons essayé diverses méthodes d'interpolation : une simple interpolation linéaire, une interpolation à l'aide de "splines"³ et les résultats sont identiques.

Une fois que l'on connaît les amplitudes $\tilde{\mathbf{a}}_i^\ell$, on peut recalculer les valeurs des paramètres de Stokes le long des cercles en soustrayant le bruit que nous venons d'ajuster par :

$$\mathbf{S}_{i,k} = \mathbf{R}_{i,k}^{-1} \left(\mathbf{s}_{i,k} - \sum_{\ell=1}^{n_{\text{fit}}} \tilde{\mathbf{a}}_i^\ell f_i^\ell(\phi_{i,k}) \right) \quad (3.13)$$

² vient de l'identité :

$$\mathbb{1} - (\mathbb{1} + \mathbf{A})^{-1} = (\mathbb{1} + \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}.$$

³ Cela consiste à ajuster sur les données le long de chaque cercle une fonction constituée de polynômes, continue et de dérivées première et seconde continues.

où i est l'indice du cercle et k , l'indice de l'échantillon sur ce cercle. Dans cette expression, $\mathbf{S}_{i,k}$ représente la valeur des paramètres de Stokes exprimés dans le système de référence lié à l'image du plan focal sur le ciel (voir Eq. 3.6 page 148) et $\sum \tilde{\mathbf{a}}_i^\ell f_i^\ell(\phi_{i,k})$ est l'estimation de la contribution du bruit résiduel résultant des contraintes que nous imposons aux intersections. La matrice $\mathbf{R}_{i,k}^{-1}$ exprime le passage des grandeurs dans le plan focal au système de référence fixe par rapport au ciel dans lequel les paramètres de Stokes $\mathbf{S}_{i,k}$ sont définis de façon univoque.

Le destriage est fait directement sur le flot de données et est donc complètement indépendant de la pixelisation choisie, ce qui nous affranchit de tous les problèmes associés à la projection de données "1D" sur une carte "2D".

Cas des configurations optimisées

Dans le cas idéal des configurations optimisées (voir Intermède B page 109) et en supposant que les h polarimètres ont des erreurs identiques et ne sont pas corrélés, les matrices \mathbf{X}_i de variance entre les paramètres de Stokes sur le cercle i sont indépendantes de i et sont diagonales (voir Eq. B.5 page 111) :

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{X} = \frac{h}{8} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \forall i.$$

Sous ces hypothèses, le système linéaire que nous venons d'écrire dans un cas très général se simplifie et devient :

$$\sum_{j \in \mathcal{I}(i), \delta = \pm 1} f_i^\ell(\phi_{i,j,\delta}) \sum_{\ell'=1}^{n_{\text{fit}}} \left[\tilde{\mathbf{a}}_i^{\ell'} f_i^{\ell'}(\phi_{i,j,\delta}) - \tilde{\mathbf{R}}(i, j, \delta) \tilde{\mathbf{a}}_j^{\ell'} f_j^{\ell'}(\phi_{j,i,-\delta}) \right] = \sum_{j \in \mathcal{I}(i), \delta = \pm 1} f_i^\ell(\phi_{i,j,\delta}) \left(\mathbf{S}_{i,j,\delta} - \tilde{\mathbf{R}}(i, j, \delta) \mathbf{S}_{j,i,-\delta} \right).$$

3.3.3 Simulations et test du destriage avec constante

Nous allons appliquer le formalisme que nous venons de développer au cas plus simple consistant à modéliser le bruit résiduel sur chaque cercle et pour chaque détecteur par une constante. Nous avons vu page 132 que pour des valeurs réalistes de $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}$ (c'est-à-dire de l'ordre de 1) et de α (plus petites que 2), l'approximation par une constante était correcte. L'étude détaillée de ce cas particulier de destriage correspond à l'article Revenu et al. (2000).

Système linéaire

Comme nous l'avons montré précédemment (voir page 134), un spectre de bruit réaliste nous permet de modéliser le bruit résiduel sur les cercles par une constante différente, pour chaque polarimètre et pour chaque cercle. Ce cas particulier et très simple suffit tant que $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}} \leq 1$ — nous allons le démontrer — et correspond, avec les notations que

nous avons introduites avant à $n_{\text{fit}} = 1$ et $f_i^\ell = 1$. Nous allons faire une étude exhaustive du destriage lorsque l'on essaye d'ajuster une constante sur les cercles.

Le système linéaire du destriage devient :

$$\sum_{j \in \mathcal{I}(i), \delta = \pm 1} \left(\mathbb{1} + \tilde{\mathbf{R}}(i, j, \delta) \mathbf{X}_j^{-1} \tilde{\mathbf{R}}(i, j, \delta) \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(\Delta_i - \tilde{\mathbf{R}}(i, j, \delta) \Delta_j \right) = \sum_{j \in \mathcal{I}(i), \delta = \pm 1} \left(\mathbb{1} + \tilde{\mathbf{R}}(i, j, \delta) \mathbf{X}_j^{-1} \tilde{\mathbf{R}}(i, j, \delta) \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(\mathbf{S}_{i,j,\delta} - \tilde{\mathbf{R}}(i, j, \delta) \mathbf{S}_{j,i,-\delta} \right), \quad (3.14)$$

où nous avons introduit, pour alléger un peu les notations, les 3-vecteurs :

$$\Delta_i = \tilde{\mathbf{a}}_i^\ell = \begin{pmatrix} \Delta_i^I \\ \Delta_i^Q \\ \Delta_i^U \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc un système linéaire de dimensions $3n \times 3n$, avec $3n$ inconnues à déterminer, les composantes des Δ_i relatives à I , Q et U . Remarquons que dans cette équation apparaît le terme $\Delta_i - \tilde{\mathbf{R}}(i, j, \delta) \Delta_j$. Étant donnée la forme de la matrice de rotation $\tilde{\mathbf{R}}(i, j, \delta)$ (voir Eq. 3.10), nous pouvons l'expliciter :

$$\Delta_i - \tilde{\mathbf{R}}(i, j, \delta) \Delta_j = \begin{pmatrix} \Delta_i^I - \Delta_j^I \\ \Delta_i^Q \cos 2\delta_\psi(i, j, \delta) - \Delta_j^Q \sin 2\delta_\psi(i, j, \delta) \\ -\Delta_i^U \sin 2\delta_\psi(i, j, \delta) - \Delta_j^U \cos 2\delta_\psi(i, j, \delta) \end{pmatrix}$$

Les constantes sur la température apparaissent dans le système linéaire uniquement à travers leurs *différences* $\Delta_i^I - \Delta_j^I$. Le destriage avec une constante par cercle présente naturellement une dégénérescence ; si une famille :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \vdots \\ \Delta_i^I \\ \Delta_i^Q \\ \Delta_i^U \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ est solution alors } \Delta' = \Delta + \mathbf{C}^{\text{te}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

est aussi solution. Par conséquent, le rang du système est $3n - 1$. Pour le résoudre, on peut soit fixer une constante sur la température (par exemple $\Delta_0^I = 0$ sur le cercle 0) ou ajouter une contrainte supplémentaire (par exemple, demander à ce que la composante sur le vecteur de base du noyau de l'application soit nulle). Une fois que toutes les constantes sont calculées, on en déduit les valeurs des paramètres de Stokes nettoyées du bruit par (voir Eq. 3.13) :

$$\mathbf{S}_{i,k} = \mathbf{R}_{i,k}^{-1} (\mathbf{S}_{i,k} - \Delta_i).$$

À cause de la dégénérescence, le ciel ainsi reconstruit après destriage est le ciel réel⁴ à une constante près.

⁴ C'est du moins ce que nous espérons.

Simulations

Pour tester le destriage, nous avons procédé à des simulations. Il a donc fallu écrire des programmes informatiques simulant :

- une stratégie de balayage du ciel ;
- un ciel réaliste, comprenant les contributions de la galaxie, du dipôle (voir page 51) et du CMB — ainsi que ses fluctuations — ceci pour la température *et* la polarisation ;
- du bruit⁵ de spectre en α/f plus bruit blanc, α/f^2 plus bruit blanc et $\alpha/f + \beta/f^2$ plus bruit blanc ;
- la mesure du ciel par les polarimètres.

Tout d’abord, nous définissons un plan focal : nous spécifions le nombre de polarimètres, leurs positions relatives dans le plan focal (c’est-à-dire leurs séparations angulaires), un angle d’ouverture, un angle de résolution (qui est l’angle séparant sur chaque cercle de données deux échantillons successifs), une stratégie de balayage (qui peut être anti-solaire ou sinusoïdale par exemple), une fréquence de rotation des détecteurs, une fréquence d’échantillonnage et un nombre de scans par cercle. On calcule ensuite la rms du bruit blanc de façon à avoir une sensibilité identique à celle de PLANCK. Ensuite, on construit des cartes simulées de ciel : galaxie, CMB et dipôle.

– **Cartes de température et de polarisation du CMB.**

Nous avons utilisé le code **CMBfast** pour générer des spectres de puissance C_ℓ^T , C_ℓ^E et C_ℓ^B , à partir desquels on génère des cartes de température et de polarisation ; la procédure a été exposée en détail dans l’Intermède A page 103. Nous avons choisi des paramètres cosmologiques standards.

– **Cartes de température de la galaxie.**

L’émission totale de la galaxie est bien connue. Nous disposons de nombreuses cartes (Haslam et al. (1982), DIRBE, IRAS). Elle résulte de la superposition de divers processus astrophysiques, comme le rayonnement synchrotron, le Bremsstrahlung et l’émission intrinsèque des poussières galactiques. Le rayonnement synchrotron, dû au mouvement des électrons autour des lignes de champ magnétique, se situe essentiellement dans le domaine radio et devient négligeable par rapport au CMB au delà de 70 GHz. Les électrons qui rayonnent par ces processus doivent avoir une énergie de l’ordre du GeV pour émettre dans le domaine de fréquences qui nous intéresse ici, le GHz. Des électrons aussi énergétiques sont vraisemblablement produits par des phénomènes astrophysiques très énergétiques, comme les explosions de supernovæ. L’émission associée est donc localisée. L’onde de choc produite par l’explosion des supernovæ interagit avec le milieu interstellaire et crée des perturbations magnétiques importantes en comprimant les lignes de champ, où le rayonnement synchrotron est très intense. La répartition de l’émission se fait selon des boucles de grandes dimensions, s’étendant loin hors du plan galactique.

Quant à la contribution de la poussière, on pense que le scénario est le suivant : le rayonnement stellaire chauffe la poussière présente dans la galaxie ; la lumière est principalement absorbée dans l’ultraviolet et dans le visible pour être réémise dans l’infrarouge. L’estimation précise de la contribution de la poussière devient cruciale pour les expériences CMB car c’est une composante importante aux fréquences de l’ordre de 100 GHz (voir Fig. 3.8). Les cartes de température que nous avons utilisées ont été extrapolées à la fréquence de 217 GHz, correspondant à un canal polarisé de l’instrument HFI du satellite PLANCK.

⁵ Le générateur de bruit utilisé a été écrit par F. Couchot.

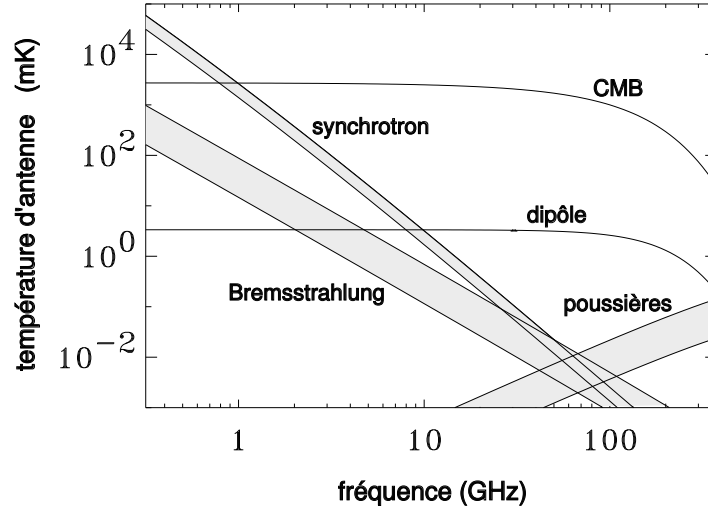


Fig. 3.8: **Contributions galactiques et CMB.** Estimations des contributions galactiques aux fréquences pertinentes pour l'observation du CMB. Les mesures à des fréquences supérieures à 100 GHz sont fondamentales car elles permettent de mesurer l'émission des poussières à ces fréquences, permettant de mieux connaître la loi d'émission. Cette figure est adaptée de Smoot (1999).

– **Cartes de polarisation de la galaxie.**

Il existe quelques données de l'émission synchrotron polarisée, à des fréquences plus faibles (~ 1 GHz) que celles que nous considérons ici (10-1000 GHz). Le taux de polarisation estimé à 1 GHz pour l'émission synchrotron se situe autour de 35 % (Cortiglioni et Spoelstra, 1995). Les poussières galactiques sont également source de rayonnement polarisé. Les observations ont montré que la lumière des étoiles, en partie absorbée par les poussières, devient polarisée. Il s'ensuit que la réémission par ces poussières est aussi polarisée. Là aussi, les modèles donnent un taux de polarisation de 30 % environ.

Pour fabriquer des cartes simulées de polarisation de galaxie, nous nous sommes appuyés sur les faits suivants : le taux de polarisation est de l'ordre de 30 %; la polarisation semble corrélée sur des échelles de quelques degrés (typiquement 5°). Nous avons généré un champ de vecteurs tangents à la sphère continu avec une longueur de corrélation de quelques degrés. Les normes de ces vecteurs sont normalisées à un taux de polarisation de quelques dizaines de pourcent. La direction de ces vecteurs en chaque point de la sphère donne la direction de la polarisation. Munis du taux de polarisation ($\text{taux} = \sqrt{Q^2 + U^2}/I$, I étant connu) et de sa direction ($\tan 2\alpha = Q/U$), il est facile de fabriquer les deux cartes nécessaires de Q et de U (voir Figs. 3.9 et 3.10). Nous pensons de la sorte avoir généré des cartes de polarisation plausibles de la galaxie.

– **Dipôle** (voir aussi page 51).

Nous avons utilisé les résultats de COBE : la température due au mouvement de la Terre par rapport au CMB lorsque l'on observe dans la direction \hat{n} est donnée par

$$T_{\text{dipôle}}(\hat{n}) = 3.358 \times 10^{-3} \hat{n} \cdot \hat{n}_{\text{dipôle}} \text{ K},$$

avec $(\alpha_{\text{dipôle}}, \delta_{\text{dipôle}}) = (168.23^\circ, -6.972^\circ)$.

Le dipôle n'influe pas sur la composante polarisée du CMB.

Les cartes initiales de I , Q et U sont les sommes des cartes individuelles de galaxie, dipôle et CMB, les paramètres de Stokes étant additifs pour des ondes incohérentes.

L'étape suivante consiste à observer ce ciel simulé en prenant soin d'ajouter à la contribution du signal (terme **ARS** de l'Eq. 3.2 page 147) la contribution du bruit. On calcule la moyenne des N scans et les matrices de corrélation \mathbf{N}_i . Il ne reste plus qu'à construire le système linéaire et à calculer les constantes à ajuster Δ_i . On en déduit facilement les paramètres de Stokes débarrassés du bruit en utilisant l'Eq. 3.13. Connaissant les coordonnées $(\theta_{i,k}, \phi_{i,k})$ de chaque point de mesure $\{i, k\}$, nous construisons des cartes de signal destriées. Afin d'estimer la qualité du destriage, nous calculons les cartes des résidus, c'est-à-dire la *différence* entre les cartes I , Q et U après destriage et les cartes I , Q et U initiales. Nous construisons ainsi 3 cartes de résidus :

- une carte pour laquelle le bruit était blanc ;
- une carte brute, avec bruit que l'on n'a pas essayé de retirer ;
- une carte pour laquelle on a soustrait à chaque cercle sa moyenne avant reprojection.

Notons que le destriage le plus simple consistant à retirer à chaque cercle sa moyenne est le meilleur s'il n'y a pas de signal. En effet, dans la mesure où, *en l'absence de signal*, le bruit se modélise bien par des constantes différentes pour chaque cercle et pour chaque polarimètre, retirer la moyenne (c'est-à-dire la constante) est idéal puisque seul le bruit contribue à ce niveau constant. Cependant, en présence de signal, celui-ci y contribue également et soustraire la moyenne revient à soustraire du signal. À titre de comparaison, nous avons essayé ce destriage simple. Enfin, nous avons vérifié qu'un destriage effectué sur des données n'ayant que du bruit blanc n'introduit pas de striage. Nous avons testé le destriage sur diverses missions : avec 3 ou 4 polarimètres, avec des angles d'ouverture différents, des stratégies de balayages différentes et des spectres de bruits différents. La qualité du destriage dépend essentiellement du rapport $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}$. Il est excellent pour des valeurs de $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}$ inférieures ou égales à un. Ces très bons résultats perdurent pour n'importe quelle superposition de bruit en $1/f$ et $1/f^2$ pourvu que $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}} \leq 1$.

Les Figs. 3.11–3.18 montrent les cartes de résidus que nous avons obtenues, pour une stratégie de balayage sinusoïdale, avec un angle d'ouverture de 85° , avec 3 polarimètres disposés en configuration optimisée et une résolution de 18 minutes d'arc. La partie blanche du bruit a une rms de $21 \mu\text{K}^6$, et la partie basse fréquence est en $1/f$ avec $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}=1$. Les échelles de niveaux de gris dans toutes les figures sont en Kelvins.

L'analyse visuelle donne déjà une bonne indication sur la qualité du destriage. Le signal que nous voulons mesurer, rappelons-le est si petit qu'il nous faut un indicateur plus précis, qui nous permette de *quantifier* le niveau de striage résiduel qu'il peut éventuellement rester sur une carte. Cet indicateur, nous l'avons déjà rencontré page 103, il s'agit des spectres de puissance C_ℓ^T , C_ℓ^E et C_ℓ^B . Un destriage parfait donnerait les mêmes spectres de puissance qu'un spectre de bruit blanc. Un ciel vu de façon uniforme (même erreur σ_{pix} dans chaque pixel de la carte), a un spectre constant, égal à :

$$\langle C_\ell^T \rangle_{\text{bruit blanc}} = \frac{4\pi}{N_{\text{pix}}} \sigma_{\text{pix}}^2.$$

Dans notre cas, à cause de la stratégie de balayage, le ciel n'est pas vu uniformément, cette expression n'est donc pas applicable dans notre cas. Nous pouvons cependant calculer par des simulations les spectres du bruit blanc pour une stratégie de balayage donnée. Nous en déduisons également l'erreur sur les spectres en procédant à de nombreuses

⁶ C'est ce que l'on attend pour le canal polarisé à 143 GHz de PLANCK.

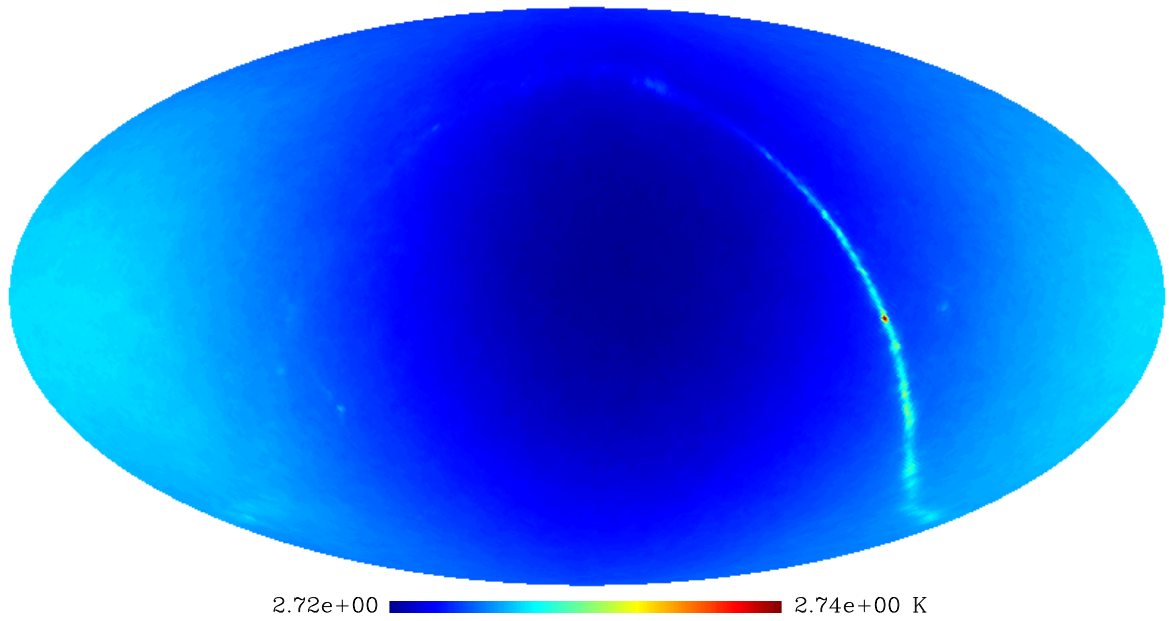


Fig. 3.9: Carte de température du ciel simulée. Cette carte de température contient la galaxie (obtenue à partir des données IRAS), le dipôle et le CMB, ainsi que ses fluctuations. L'échelle est en degrés K.

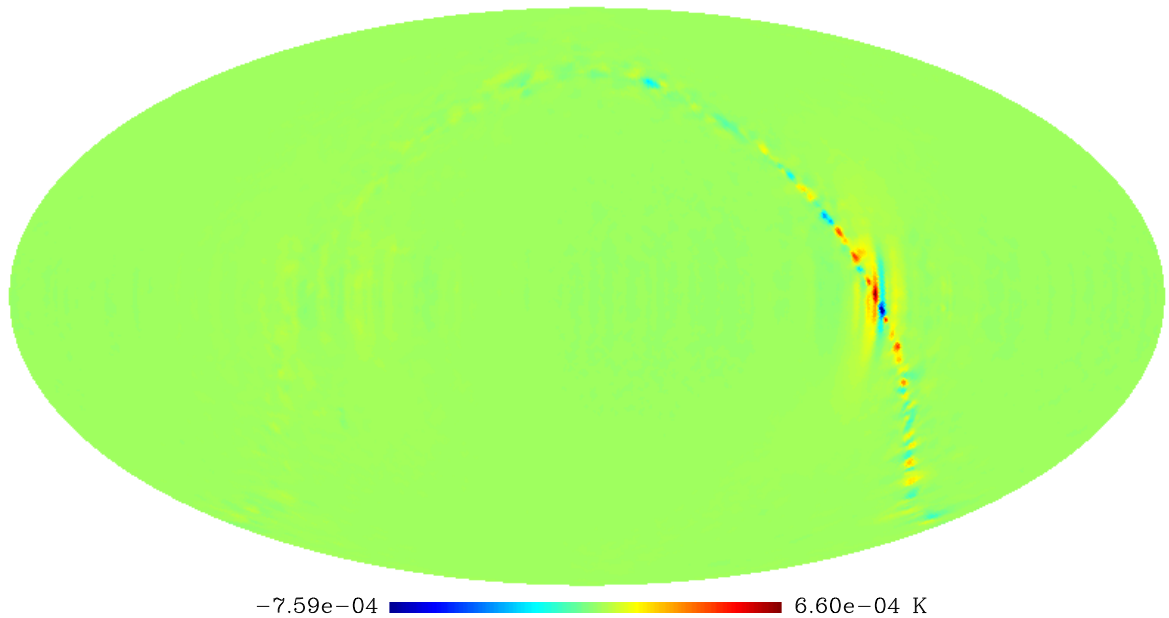


Fig. 3.10: Carte de polarisation Q du ciel simulée. La polarisation de la galaxie, encore mal connue, a été simulée à partir de cartes de température en imposant un taux de polarisation de l'ordre de 30 % pour des régions proches du plan galactique, valeur vraisemblable (lire le texte).

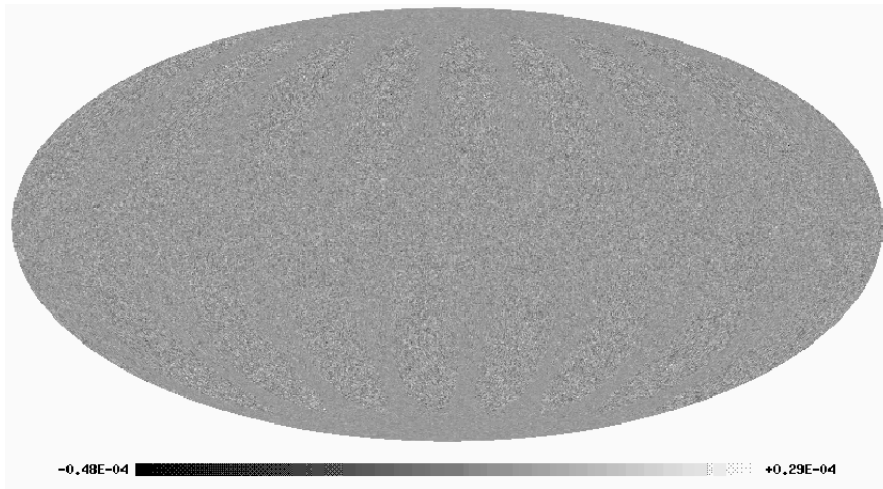


Fig. 3.11: Résidus de I pour du bruit blanc. Projection des résidus pour une mission ayant observé un ciel simulé avec du bruit blanc. Un examen attentif de cette carte vers les pôles montre que l'erreur est plus faible dans ces régions. Ceci est dû au fait que les régions proches des pôles sont vues plus souvent que les régions équatoriales dans une stratégie sinusoïdale comme le montre la Fig. 3.5.



Fig. 3.12: Résidus de I pour du bruit basse fréquence sans destriage. Projection des résidus pour une mission ayant observé un ciel simulé avec du bruit basse fréquence, sans destriage. L'échelle de niveaux de gris montre que le bruit est trop fort pour permettre la mesure des fluctuations de température du CMB.



Fig. 3.13: Résidus de I pour du bruit basse fréquence avec moyenne nulle. Projection des résidus pour une mission ayant observé un ciel simulé avec du bruit basse fréquence avec un destriage élémentaire consistant à retirer à chaque cercle sa valeur moyenne. La présence de structures intenses (essentiellement dues au dipôle) dans cette carte montre que le fait de soustraire la moyenne de chaque cercle en guise de destriage élémentaire ne fonctionne pas en présence de signal. Leur symétrie est due au dipôle qui est pratiquement centré sur cette carte en coordonnées équatoriales.

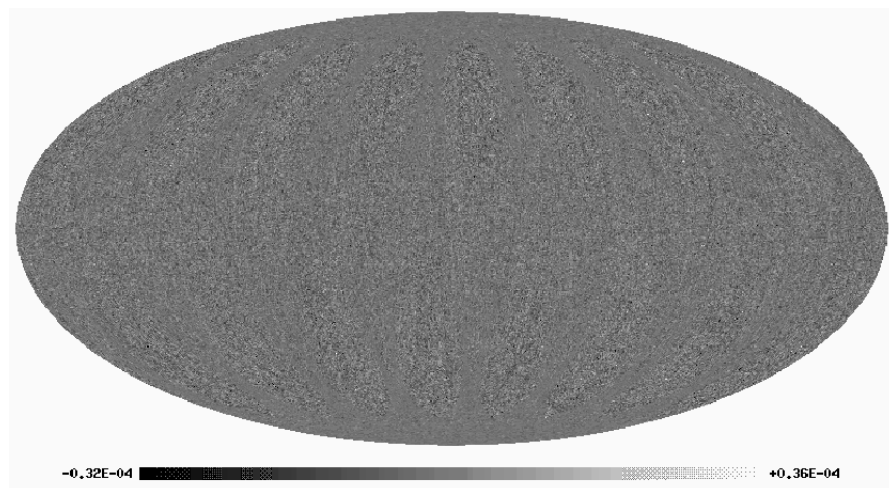


Fig. 3.14: Résidus de I pour du bruit basse fréquence avec destriage. Projection des résidus pour une mission ayant observé un ciel simulé avec du bruit basse fréquence, après destriage. À l'œil, cette carte est identique à celle correspondant au bruit blanc (Fig. 3.11).

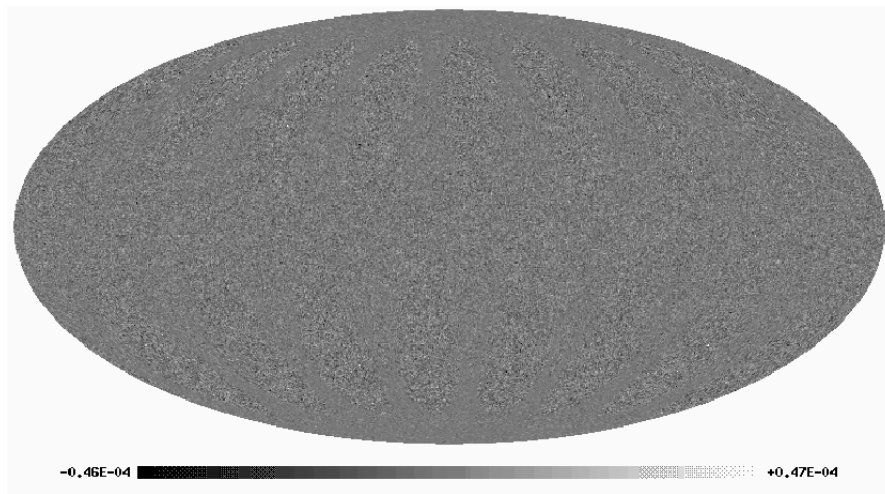


Fig. 3.15: **Résidus de Q pour du bruit blanc.** Projection des résidus pour une mission ayant observé un ciel simulé avec du bruit blanc.

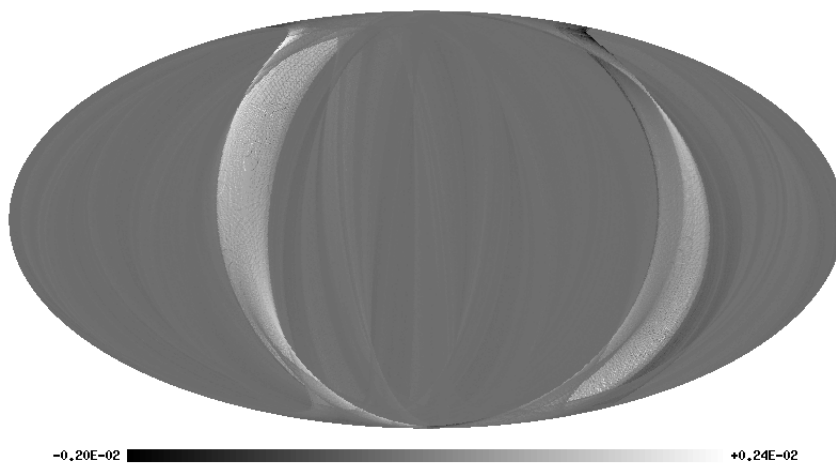


Fig. 3.16: **Résidus de Q pour du bruit basse fréquence sans destriage.** Projection des résidus pour une mission ayant observé un ciel simulé avec du bruit basse fréquence, sans destriage.

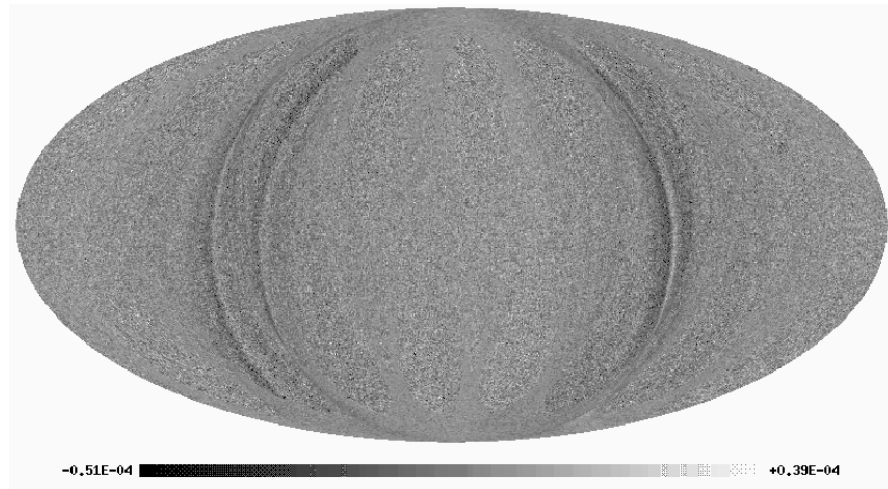


Fig. 3.17: Résidus de Q pour du bruit basse fréquence avec moyenne nulle. Projection des résidus pour une mission ayant observé un ciel simulé avec du bruit basse fréquence avec un destriage élémentaire consistant à retirer à chaque cercle sa valeur moyenne. Les structures résiduelles dans cette carte sont plus faibles que dans le cas de la température. Ceci est dû au fait que le signal polarisé est plus faible, donc la moyenne nulle est “moins fausse”. Notons également que les cercles contaminés sont ceux qui ont vu les parties les plus lumineuses de la galaxie (comparer la forme des structures avec celles de la Fig. 3.10).

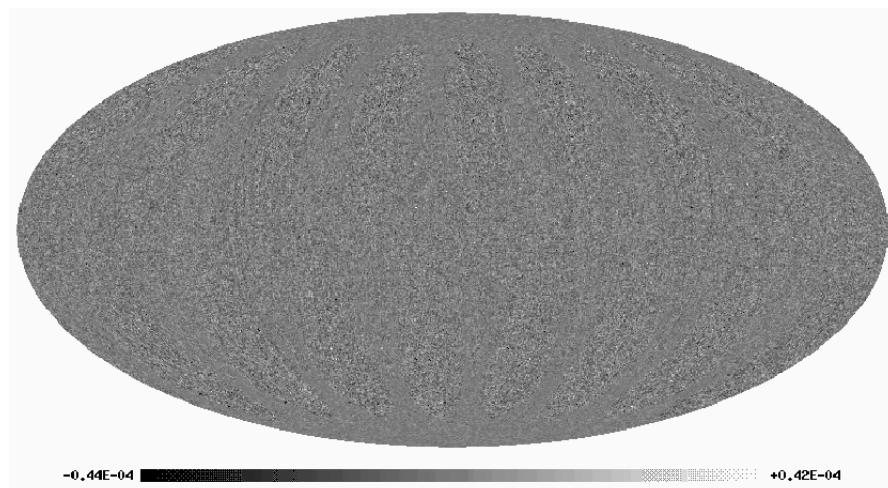


Fig. 3.18: Résidus de Q pour du bruit basse fréquence avec destriage. Projection des résidus pour une mission ayant observé un ciel simulé avec du bruit basse fréquence, après destriage. À nouveau, cette carte est indiscernable de celle obtenue avec du bruit blanc.

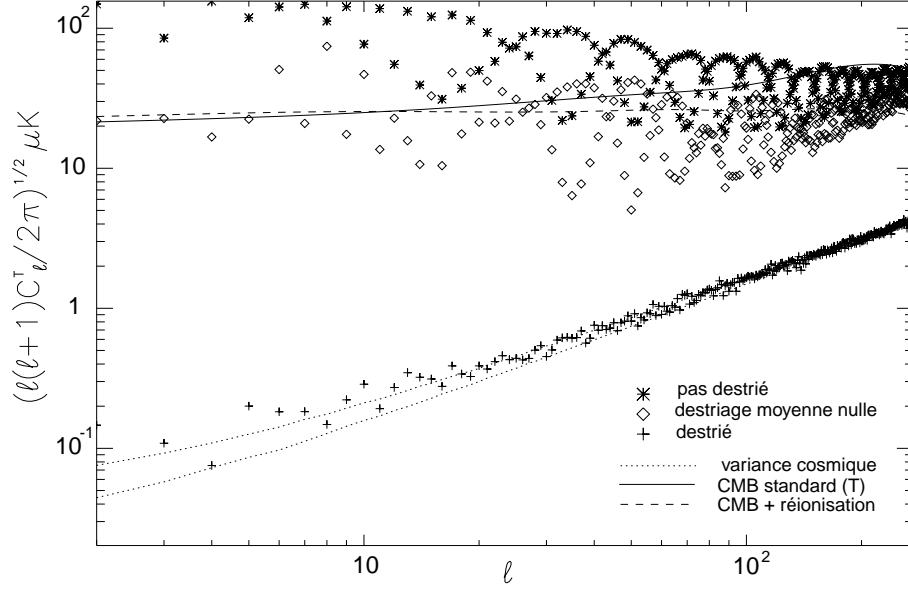


Fig. 3.19: **Efficacité du destriage pour T avec $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}} = 1$.** Le spectre de puissance de la carte des résidus après destriage est contenue dans la région délimitée par la variance cosmique ; il est donc indiscernable d'un spectre de bruit blanc. Les spectres des cartes non-destriée et à moyenne nulle sont deux ordres de grandeur au-dessus. Cette figure correspond à $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}=1$. Des modèles de spectre ont été ajoutés pour comparaison. Le spectre intitulé “CMB” correspond à un spectre standard de CMB, tandis que le spectre intitulé “CMB+réionisation” correspond, comme son nom l'indique, au spectre obtenu avec réionisation.

simulations (5000). Par exemple, dans le cas d'une couverture uniforme, cette erreur décroît en $1/\sqrt{\ell}$ (voir la variance cosmique, page 84 et Knox (1995)). Dans notre cas, nous trouvons la même loi de décroissance. Nous avons donc délimité une région qui nous sert de référence : une réalisation unique de bruit blanc doit être incluse dans cette région, à 1 sigma⁷ près (68 %).

⁷ En toute rigueur, les C_ℓ^T , C_ℓ^E et C_ℓ^B suivent une loi de χ^2 ; mais cette loi, pour un nombre de degrés de liberté plus grand que 30 (correspondant dans notre cas à $\ell \geq 15$), se comporte comme une loi normale de variance 1.

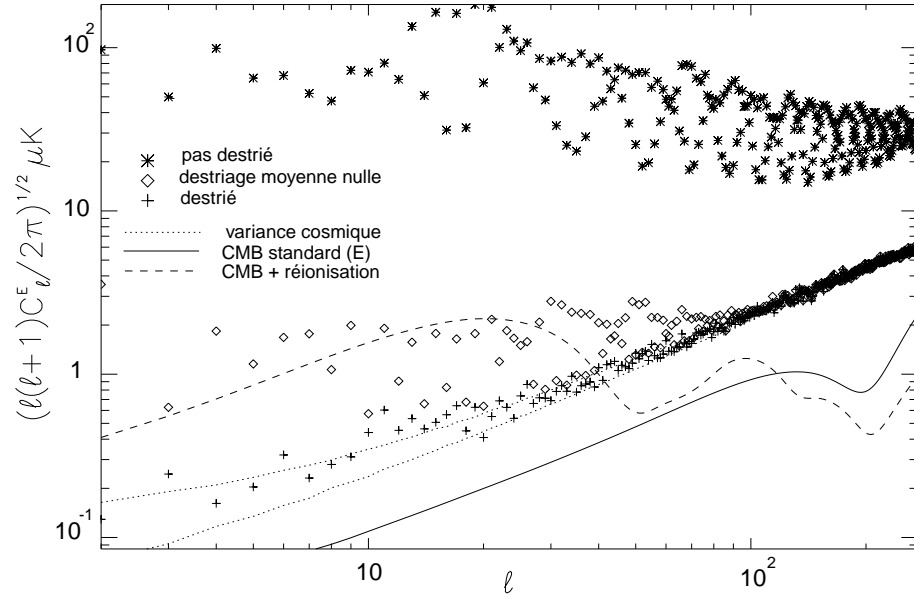


Fig. 3.20: Efficacité du destriage pour E avec $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}} = 1$. De même que pour la température, le spectre de puissance de la carte des résidus après destriage est contenue dans la région délimitée par la variance cosmique. Le spectre correspondant à la moyenne nulle a une puissance supérieure au spectre destrié mais bien inférieur au spectre non-destrié. Les faibles structures visibles dans la Fig. 3.16 sont responsables de cet excès de puissance. Cette figure correspond à $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}=1$. Il semble difficile d'après cette figure d'avoir accès au champ E (sauf en cas de réionisation) : rappelons que les simulations ont été faites avec une résolution de 18 minutes d'arc correspondant à un ordre multipolaire maximum ℓ de l'ordre de 300 ; le spectre de polarisation du champ E se rapproche notablement du spectre du bruit blanc à des ℓ plus élevé (PLANCK aura la résolution angulaire suffisante pour atteindre $\ell \sim 2000$).

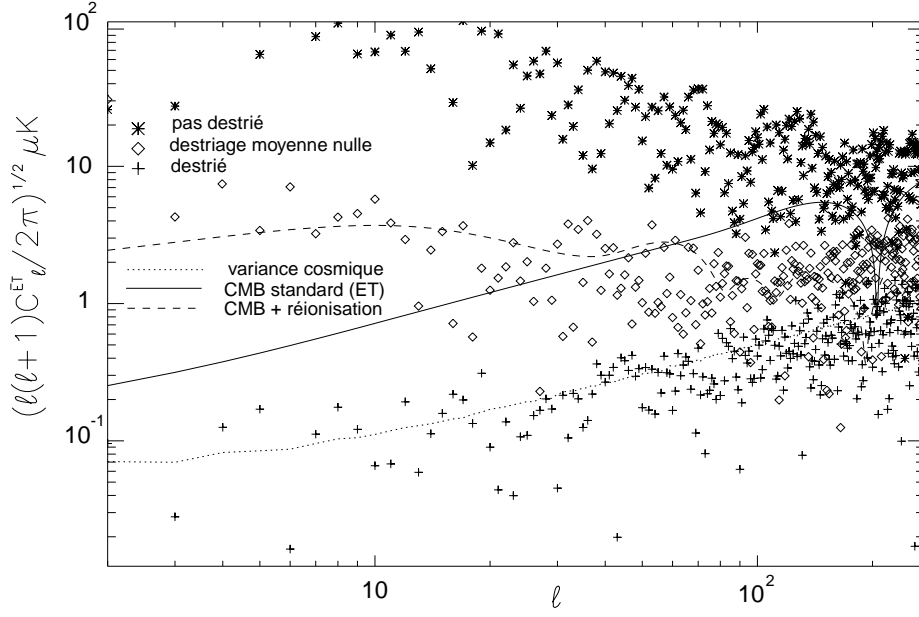


Fig. 3.21: **Efficacité du destriage pour la corrélation ET avec $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}} = 1$.** Le spectre destrié est toujours compatible avec un spectre de bruit blanc. Les modèles (standard et avec réionisation) sont bien au-dessus, ce qui permet de penser qu'on sera capable, avec PLANCK, de mesurer correctement les corrélations entre les champs T et E . Cette figure correspond à $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}=1$.

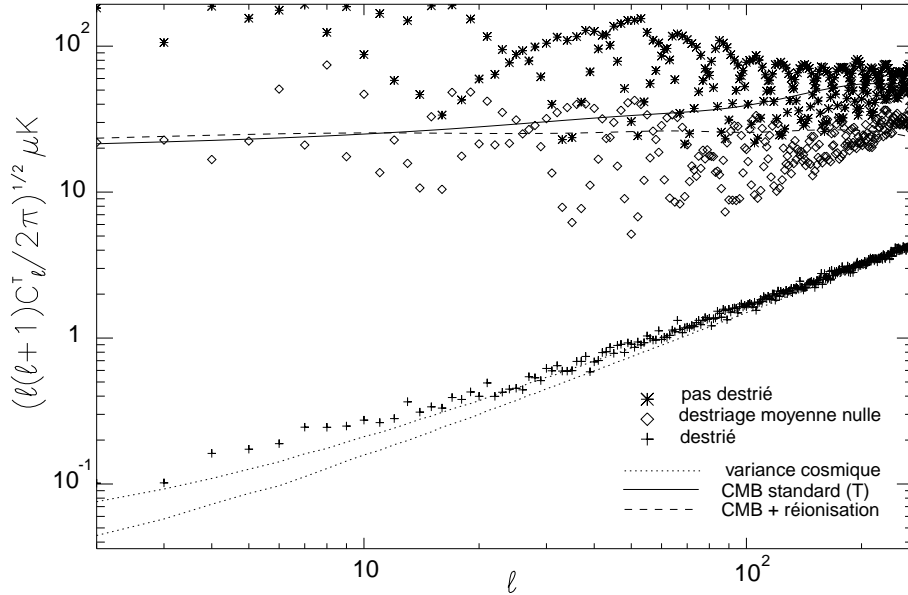


Fig. 3.22: **Efficacité du destriage pour T avec $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}} = 5$.** Il y a un excès de puissance assez net pour le spectre destrié par rapport à ce que l'on attend dans le cas du bruit blanc. Cela s'explique par le fait que, pour $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}=1$, modéliser le bruit sur les cercles par une constante ne suffit plus ; il faut affiner ce modèle et ajuster plutôt une fonction en escalier, un polynôme de degré 2 ou une combinaison de sinus et de cosinus.

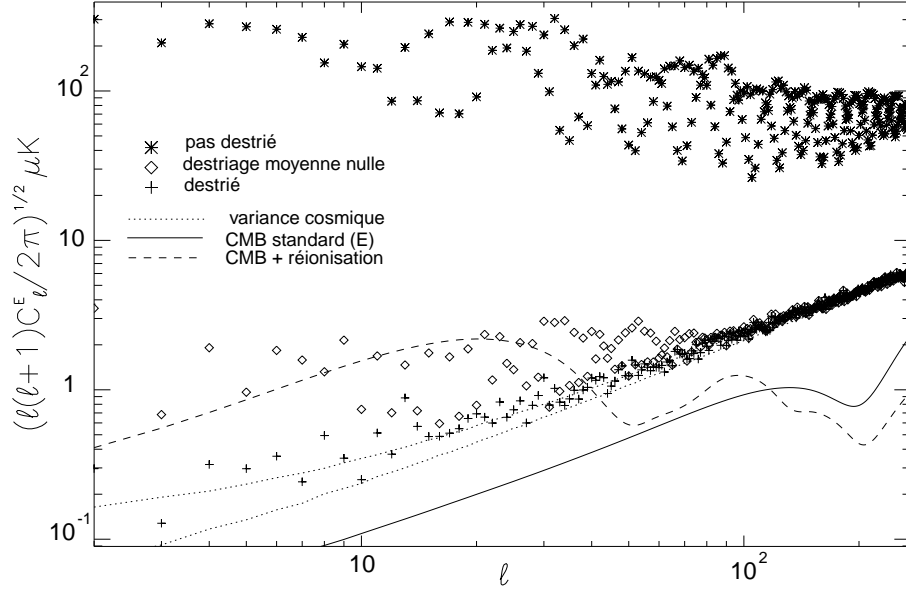


Fig. 3.23: **Efficacité du destriage pour E** avec $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}} = 5$. Même figure que la Fig. 3.22 mais pour le champ E .

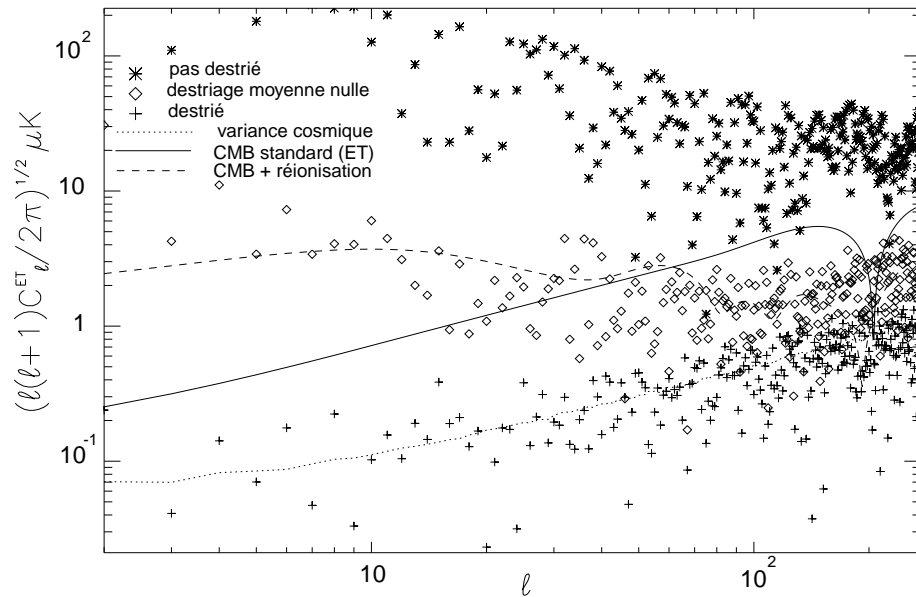


Fig. 3.24: **Efficacité du destriage pour la corrélation ET** avec $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}} = 5$. Même figure que la Fig. 3.21 mais pour $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}=5$.

Il est possible de quantifier d'une autre manière le striage résiduel sur une carte. Il est caractérisé par la valeur de la quantité suivante :

$$\frac{\text{rms} \left(a_{\ell\ell}^{T,E,B} \right)}{\text{rms} \left(a_{\ell 0}^{T,E,B} \right)}, \quad (3.15)$$

où la rms est calculée sur les valeurs de ℓ . Pour une carte de bruit blanc avec une couverture de ciel uniforme, ce rapport vaut 1. Pour comprendre cet estimateur, il faut se rappeler ce que sont les $a_{\ell m}^X$ (voir page 105). Tout d'abord, $a_{\ell 0}^X$ représente la *moyenne arithmétique* (pondérée par les polynômes de Legendre) des pixels répartis sur ϕ à θ fixé. De même, $a_{\ell\ell}^X$ est la moyenne (pondérée par les mêmes facteurs) du mode de Fourier le plus élevé de ces mêmes pixels. Si la carte ne contient que du bruit blanc et qu'elle est vue de façon uniforme (même rms par pixel) alors le rapport est 1 (il y a autant de puissance à petite échelle qu'à grande échelle).

Méthode	$f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}$	T	E	B
bruit blanc	0	1	1	1
destrié	0.5	1.19	1.05	1.03
moyenne nulle	0.5	51.9	9.23	3.64
pas destrié	0.5	6.98	7.04	15.2
destrié	1	1.24	1.12	1.19
moyenne nulle	1	52.2	9.91	3.95
pas destrié	1	10.7	10.9	7.51
destrié	2	1.26	1.32	1.23
moyenne nulle	2	49.5	10.2	3.85
pas destrié	2	6.41	9.97	8.18
destrié	5	1.35	1.39	1.38
moyenne nulle	5	49.8	10.4	3.99
pas destrié	5	11.3	8.24	12.4

Cet estimateur est sensible aux stries orthogonales aux cercles sur la sphère paramétrés par $\theta = \text{C}^{\text{te}}$ (parallèles à l'équateur). Les stries présentes le long de ces cercles ne sont pas détectées (voir Fig. 3.25). L'estimateur est donc bien adapté à notre cas puisque les cercles sont pratiquement orthogonaux à ces cercles.

Discussion et conclusions

Ce destriage est à ce jour le seul qui traite des données polarisées. Il existe cependant d'autres méthodes capables de destrier les données de température. Celles-ci pourraient être adaptées dans un avenir proche à la polarisation, ce qui nous permettra de comparer les efficacités relatives des différentes méthodes. Comme nous l'avons vu au début de cette partie (voir page 127), la méthode la plus classique consiste à modéliser les mesures faites par un bolomètres de la façon suivante :

$$m(t) = A_{t,\phi} s(\phi) + n(t),$$

où $A_{t,\phi}$ est la matrice de pointage qui fait correspondre à un échantillon au temps t une position sur le ciel, repérée par sa position ϕ , T un vecteur contenant le signal que nous

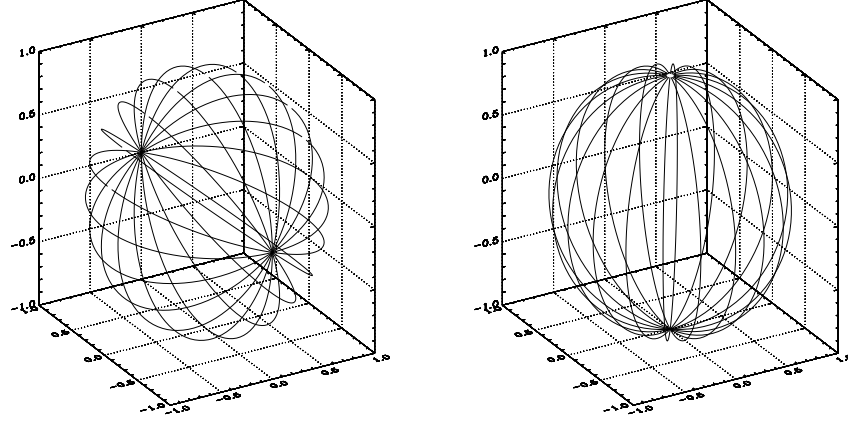


Fig. 3.25: Estimateur de striage résiduel. L'estimateur de striage résiduel présenté dans l'Eq. 3.15 n'est pas sensible à la présence de stries parallèles à l'équateur comme c'est le cas dans la figure de gauche. Il est par contre très pertinent pour détecter les stries parallèles aux méridiens (figure de droite).

cherchons à mesurer, m_t sont les données et n_t est le bruit. Une simple minimisation de χ^2 nous fournit un estimateur du signal :

$$s(\phi) = (A_{t,\phi}^T N^{-1} A_{t,\phi})^{-1} A_{t,\phi}^T N^{-1} m(t),$$

où $N = \langle n n^T \rangle$ est la matrice de corrélation du bruit. Cette méthode peut en principe être étendue aux mesures de polarisation, au prix de multiplier la taille du système obtenue dans le cas de la température par un facteur⁸ $3 \times h$. L'implémentation numérique d'un tel système est extrêmement problématique (très couteux en terme de mémoire et de temps de calcul) lorsque l'on considère des expériences CMB générant des millions de pixels, ce qui est déjà courant et le sera de plus en plus, à cause de la course au nombre de pics Doppler ; la taille du système linéaire est de plusieurs millions. Des techniques de calcul ont été proposées (Wright, 1996; Tegmark et al., 1998; Borrill, 1999) mais elles supposent que le bruit est gaussien et stationnaire, ce qui ne sera probablement pas le cas pour des missions sensibles. Notre méthode ne nécessite qu'une inversion de matrice de taille réduite $(n_{\text{fit}} \times n) \times (n_{\text{fit}} \times n)$ (n est le nombre de cercles, de l'ordre de 10 000 pour PLANCK) et ne suppose aucune propriété sur la statistique du bruit basses fréquences. Elle suppose juste une fréquence limite (f_{knee}) au delà de laquelle le bruit peut être considéré comme blanc.

Dans le destriage simple consistant à ajuster une constante pour modéliser l'effet des dérives basses fréquences, nous avons supposé que le bruit n'était plus corrélé après avoir soustrait la constante ajustée et que le bruit était réellement blanc. Cette hypothèse nous a permis d'écrire un χ^2 simplifié (celui donné dans l'Eq. 3.14). En fait, il reste encore un peu de corrélation sur les cercles. La quantité de corrélation résiduelle est directement liée à la valeur de $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}$; plus $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}$ est petit, plus la corrélation est faible (c'est-à-dire meilleur le modèle de la constante est). Les Figs. 3.26 et 3.27 montrent le spectre de puissance angulaire du bruit résiduel sur le cercle après avoir moyenné 60 scans pour différentes valeurs de $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}$ et de α en fonction de la fréquence angulaire. Elles montrent, naturellement, que la corrélation le long du cercle augmente avec le rapport

⁸ par 3 car on fait des mesures de I , Q et U et par h car c'est le nombre de polarimètres, par opposition à 1 bolomètre.

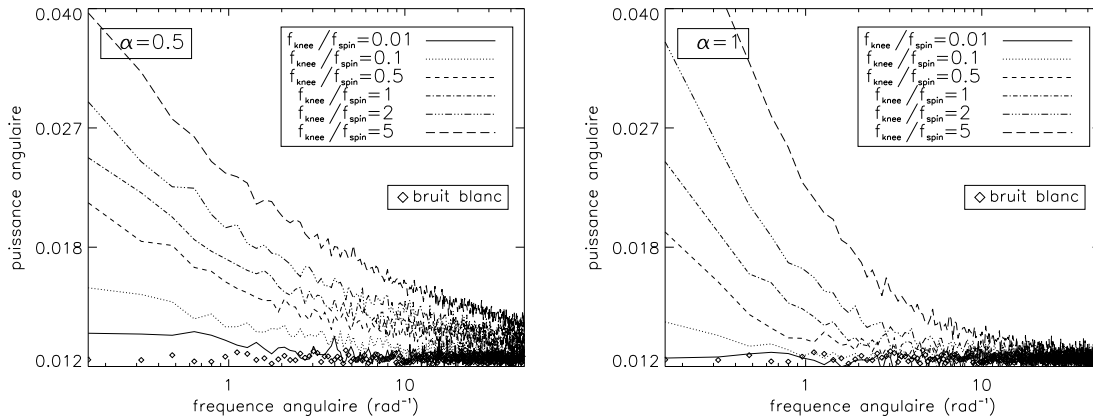


Fig. 3.26: Corrélation angulaire résiduelle sur un cercle avec $\alpha \in \{0.5, 1\}$. Ces figures présentent la corrélation angulaire résiduelle entre les échantillons le long d'un cercle, après avoir moyenné 60 scans. La corrélation augmente avec la valeur du rapport $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}$ mais elle reste très faible ; l'approximation du bruit blanc est justifiée pour des valeurs de $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}$ de l'ordre de 1, avec $\alpha \in \{0.5, 1\}$. Le bruit que nous avons traité dans le destriage entre dans cette catégorie.

$f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}$ et α . À titre de comparaison, nous avons représenté le spectre de puissance angulaire correspondant à du bruit blanc.

Le destriage présenté en détail dans ce chapitre montre que nous sommes capables de soustraire les effets des dérives basses fréquences jusqu'au niveau du bruit blanc pourvu que $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}} \leq 1$. Pour PLANCK, ce rapport est proche de 0.6. Pour des valeurs plus grandes que 1, le modèle de la constante ne suffit plus et il faut affiner la modélisation du bruit en ajoutant des fonctions plus compliquées comme, par exemple, des sinus, des cosinus, des polynômes etc... Les programmes informatiques pouvant destrier n'importe quelles fonctions existent mais n'ont pas encore été suffisamment utilisés pour pouvoir déterminer quelle valeur maximale du rapport $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}$ on pouvait tolérer (cette valeur change selon les fonctions choisies pour ajuster).

Remarque sur le lobe des détecteurs. Le faisceau caractérise le champ de vue d'un détecteur. On l'appelle aussi diagramme d'antenne et il spécifie la *réponse directionnelle* d'un instrument. Les expériences CMB font en général intervenir des éléments optiques comme des miroirs, des cornets (collimateurs de lumière) et la forme du diagramme d'antenne dépend en grande partie de toute la chaîne optique se trouvant en amont du détecteur. Les réflexions parasites, l'émissivité propre des miroirs (qui ne sont pas parfaitement réfléchissants), les cornets qui ne sont pas rigoureusement identiques d'un détecteur à l'autre, les détecteurs eux-mêmes qui ne sont pas identiques, l'environnement thermique qui fluctue, tous ces effets contribuent à la forme du diagramme d'antenne de chaque détecteur, c'est-à-dire à sa sensibilité dans une direction (θ, ϕ) donnée.

Un diagramme d'antenne idéal est symétrique, de forme gaussienne dont la largeur à mi-hauteur donne la résolution angulaire d'un détecteur. C'est ce que nous avons supposé ici. Dans la réalité, un diagramme d'antenne n'est jamais parfaitement symétrique mais présente, souvent, une structure en lobes : un lobe dit "principal" où la sensibilité du détecteur est maximale et des lobes dit "secondaires", de sensibilité moindre (souvent bien moindre) mais pas complètement négligeable.

En principe, quand on connaît parfaitement les diagrammes d'antenne de tous les détec-

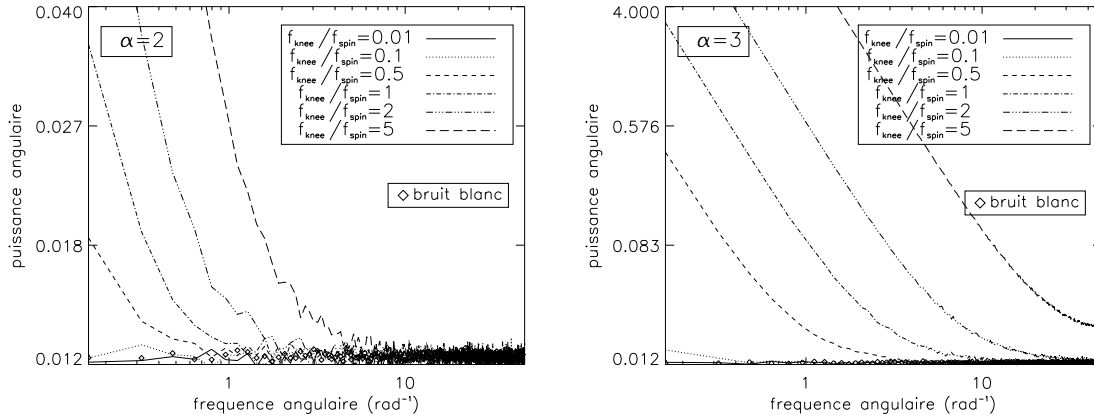


Fig. 3.27: Corrélation angulaire résiduelle sur un cercle avec $\alpha \in \{2, 3\}$. Après avoir moyenné 60 scans pour construire un cercle et pour des bruits en $1/f^2$ et des rapports $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}$ plus petits que 1, la corrélation est encore faible. Par contre, pour des bruits plus puissants à basse fréquence ($\alpha \sim 3$), et même pour des valeurs de $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}$ proches de 1 la corrélation devient très importante et l'approximation du bruit blanc ne convient plus (attention à l'axe des ordonnées).

teurs de l'instrument, il est possible de reconstruire parfaitement le signal sur le ciel. La difficulté est de les connaître avec une bonne précision. On peut les estimer en laboratoire, par exemple en éclairant l'instrument avec un rayonnement bien connu. Les conditions de laboratoire étant souvent très différentes des conditions réelles de l'expérience (en particulier pour les expériences ballon ou satellite), les diagrammes d'antenne changent, par exemple à cause du changement des conditions sol/haute atmosphère ou sol/espace ou à cause de poussières qui se déposent sur les miroirs. Ensuite, en travaillant sur les données prises par l'instrument, on les détermine en reconstruisant l'image d'une source ponctuelle, par exemple une planète.

La démarche se complique considérablement lorsque l'on veut déterminer le diagramme d'antenne pour des détecteurs polarisés. Bien entendu, la première étape consiste à les estimer en laboratoire, en utilisant des sources polarisées bien connues. Leur détermination "en vol" devient beaucoup plus problématique car aucune source astrophysique de lumière polarisée n'est connue avec une grande précision. Pour le cas de PLANCK une idée serait de placer sur le satellite FIRST⁹ une source de lumière polarisée connue que PLANCK pourrait observer au début de sa mission.

L'Agence Spatiale Européenne, qui a validé et accepté la mission PLANCK, a calculé des diagrammes d'antenne polarisés typiques attendu. Au premier ordre, il apparaît que le lobe principal n'est pas vraiment symétrique. L'hypothèse de lobe symétrique que nous avons faite dans le destriage n'est par conséquent pas réaliste (tout dépend bien sûr de la précision recherchée). Il est bien évident que pour une mesure précise de la polarisation (rappelons-nous que celle du CMB n'est qu'à quelques μK) il faudra prendre en compte la forme exacte du lobe.

Par conséquent, le travail présenté ici ne prétend pas être définitif, dans le sens où tous les problèmes nouveaux liés à la polarisation ne sont d'une part pas tous identifiés et d'autre part, pour ceux qui le seraient, pas tous résolus. La méthode par contre est

⁹ Ce satellite sera lancé en même temps que PLANCK au même endroit, au point L2 de Lagrange.

robuste et pourra être adaptée à un traitement plus général de la polarisation. Il y a encore beaucoup de travail à faire sur le destriage, à commencer par le tester sur de vraies données¹⁰ ; il faut également destrier des données en utilisant des fonctions plus compliquées qu'une constante (et voir jusqu'à quel $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}$ on peut aller et avec quel type de fonctions). Parmi bien d'autres éléments, le destriage peut aussi aider à contraindre la stratégie de balayage du ciel : il faut pour cela destrier un même flot de données avec différentes stratégies de balayage et calculer la valeur de l'estimateur de striage résiduel pour chaque stratégie. Cette étape ne consiste qu'à faire tourner abondamment les programmes et sera réalisée dans un avenir très proche.

Comme nous l'avons vu précédemment, un gros effort est à fournir quant à la compréhension et au traitement des lobes polarisés. La mesure de la polarisation du ciel devient une priorité scientifique et de plus en plus d'équipes travaillent sur les problèmes liés aux diagrammes d'antenne polarisés et sur la façon de calibrer les instruments polarisés. Nous comptons contribuer également sur ce point précis.

¹⁰ Des résultats seront présentés dans la troisième partie, relative à l'expérience COSMOSOMAS.

Troisième partie

ANALYSE PRÉLIMINAIRE DES DONNÉES DE
COSMOSOMAS

1. PRÉSENTATION DE L'EXPÉRIENCE

L'expérience COSMOSOMAS (du grec COSMO : univers et SOMA : corps, forme) est installée au pied du volcan Teide sur l'île de Ténérife, aux Canaries (Espagne), au large du Maroc (voir Fig. 1.1). La stabilité climatologique du site a attiré beaucoup d'expériences,



Fig. 1.1: **Les îles Canaries.** Le site d'observation de l'expérience COSMOSOMAS se situe sur la plus grande des îles Canaries, Ténérife, à une altitude de 2374 m. Ses coordonnées sont, en longitude et latitude, $16^{\circ}30'38''$ ouest et $28^{\circ}17'45''$ nord.

notamment liées au CMB. COSMOSOMAS est initialement anglo-espagnole¹ et notre rôle dans cette collaboration est d'analyser les données afin d'améliorer la configuration de l'expérience, qui en est encore au stade du développement.

Le principal objectif de COSMOSOMAS est de cartographier les anisotropies de température du CMB à des échelles angulaires de l'ordre du degré. Si l'immense majorité des expériences CMB se focalisent sur des échelles angulaires plus petites que le degré afin d'avoir accès aux pics Doppler (voir page 77), très peu s'intéressent aux basses valeurs de ℓ (plus petites de 100) qui permettent pourtant de contraindre la contribution tensorielle des fluctuations de la métrique aux fluctuations de température du rayonnement (Davis et al., 1992; Crittenden et al., 1993a; Knox et Turner, 1994). Un autre objectif important est de cartographier l'émission polarisée de la galaxie sur environ 25 % du ciel.

¹ Principal investigateur : C.M. Gutiérrez (IAC) ; investigateurs : R. Rebolo (IAC), R. Hoyland (IAC), J. Gallegos (IAC) ; collaborateur de l'IAC : R. Abreu ; collaborateurs externes : R.A. Watson (Univ. Manchester), J. Delabrouille (PCC, Paris), B. Revenu (PCC, Paris). PCC : Physique Corpusculaire et Cosmologie, IAC : Institut d'Astrophysique des Canaries.

Nous avons déjà vu page 153 que la polarisation du rayonnement galactique (consitué de rayonnement synchrotron, de l'émission des poussières notamment) était encore très mal connue. Pour mesurer la polarisation du CMB, il faut connaître avec une précision suffisante la contribution des avant-plans pour pouvoir la soustraire.

L'expérience dispose à l'heure actuelle de 4 canaux de fréquence : 10, 13, 15 et 17 GHz (3, 2.3, 2 et 1.76 cm respectivement). La détection se fait au sol par des HEMTs ("High Electron Mobility Transistor"), antennes qui mesurent l'intensité du rayonnement incident dans une direction donnée. Ces détecteurs mesurent donc naturellement la polarisation du rayonnement. Le canal à 10 GHz dispose de 2 antennes placées à 90° l'une par rapport à l'autre ; les autres canaux n'ont qu'une seule antenne. Ces détecteurs sont enfermés dans un cryostat fixe par rapport au sol et sont refroidis à une température nominale de 20 K. Le rayonnement accède aux détecteurs après avoir traversé des cornets dont la surface intérieure n'est pas lisse : ce sont des cornets corrugués. Les irrégularités sont créées mécaniquement et permettent d'avoir un diagramme d'antenne relativement symétrique et possédant peu de lobes secondaires. Ces cornets ont une ouverture de l'ordre du degré.

2. GÉOMÉTRIE ET COUVERTURE DU CIEL

Les rayons arrivant aux antennes ont préalablement été réfléchis par un miroir parabolique qui observe un miroir tournant dont la normale n'est pas alignée avec l'axe de rotation, de sorte que les détecteurs observent un cercle sur le ciel (voir la Fig. 2.1). Plus en détails, et en utilisant les notations de la Fig. 2.1, le trajet optique de la lumière suit les étapes suivantes : le rayonnement provenant de la direction $\hat{\mathbf{u}}$ est réfléchi par un miroir plan de normale $\hat{\mathbf{n}}$ en rotation autour de l'axe $\hat{\mathbf{\Omega}}$ vers une antenne parabolique qui éclaire les HEMTs. La normale au miroir fait un angle θ_{tilt} avec l'axe de rotation de sorte qu'elle engendre un cône d'angle d'ouverture $2 \times \theta_{\text{tilt}}$ au cours de la rotation du miroir (à une vitesse de l'ordre de 1 tour par seconde). L'axe de rotation fait un angle θ_{spin} avec le zénith. Le champ de vue du détecteur est donc un anneau circulaire de diamètre angulaire $4 \times \theta_{\text{tilt}}$ dont l'épaisseur est égale à l'angle d'acceptance du cornet — ou collimateur — placé entre l'entrée du cryostat et les antennes. Une analyse optique du système montre que les rayons quittant le miroir plan en direction du miroir parabolique doivent avoir une direction faisant un angle θ_{dish} par rapport au zénith ($\sim 57^\circ$) pour aboutir aux antennes. Il est facile de montrer que le centre des scans se trouve à une élévation $90 - \theta_{\text{dish}} + 2\theta_{\text{spin}}$. Dans le système de coordonnées locales (xyz) (liées à l'expérience, voir la Fig. 2.1), nous utilisons les coordonnées angulaires horizontales, azimuth (angle dans le plan (xy) valant 0 au Nord et croissant dans le sens Nord-Est-Sud-Ouest) et élévation (angle entre la ligne de visée et sa projection dans le plan (xy)).

Pour le moment, il existe trois configurations géométriques distinctes possibles : $\theta_{\text{spin}} = 24^\circ$, $\theta_{\text{spin}} = 26^\circ$ et $\theta_{\text{spin}} = 30.1^\circ$. L'azimuth, l'élévation et la déclinaison du centre du cercle sont alors donnés par :

θ_{spin}	24°	26°	30.1°
azimuth du centre du cercle	0°	0°	180°
élévation du centre du cercle	81°	85.3°	86.8°
déclinaison du centre du cercle	$37^\circ 17' 45''$	$32^\circ 59' 45''$	$25^\circ 5' 45''$
bande observée (déclinaisons)	$\sim [27^\circ, 47^\circ]$	$\sim [22^\circ, 42^\circ]$	$\sim [15^\circ, 35^\circ]$

La déclinaison du centre du cercle est égale à $\lambda + \theta_{\text{spin}} - 90^\circ = \lambda + \theta_{\text{dish}} - 2\theta_{\text{spin}}$, où λ est la latitude du site d'observation (voir Fig. 1.1). Le diamètre des scans étant de $4 \times \theta_{\text{tilt}} = 20^\circ$, la couverture du ciel, en déclinaison-ascension droite, est une bande de largeur constante en déclinaison. La couverture en ascension droite est assurée par la rotation de la Terre et couvre 360° puisque la prise de données peut être faite sur 24 heures.

Les cornets actuellement utilisés ont une résolution effective de 1.4° . On peut considérer que des scans sont confondus tant que l'angle entre les ascensions droites des centres est plus petit que le dixième de la résolution angulaire, correspondant à un intervalle de temps de :

$$\Delta\phi = \frac{360^\circ}{24 \times 3600} \Delta t \leq \frac{\text{résolution}/10}{\sin(90^\circ - \lambda)} \quad \text{soit} \quad \Delta t \leq 4 \text{ min } 5 \text{ s},$$

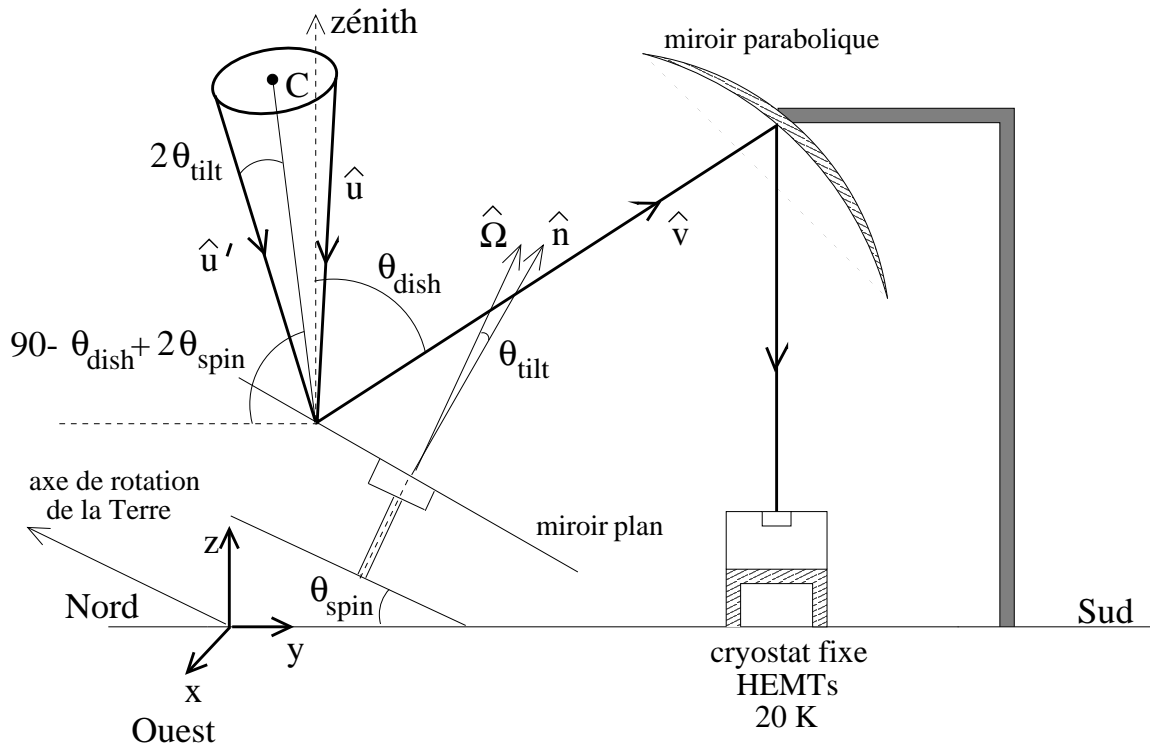


Fig. 2.1: **L'expérience COSMOSOMAS.** Un rayon lumineux \hat{u} ou \hat{u}' n'arrive au détecteur seulement s'il éclaire le miroir parabolique sous une incidence θ_{dish} , c'est-à-dire dans la direction \hat{v} . Le miroir plan tourne autour d'un axe fixe par rapport au sol $\hat{\Omega}$ et sa normale \hat{n} fait un angle θ_{tilt} avec cet axe de rotation de sorte que les rayons arrivant au détecteur sont répartis selon un cercle sur le ciel dont le centre est le point C . Le cercle a un diamètre angulaire égal à $4\theta_{\text{tilt}}$.

ou encore à environ 250 scans puisque l'on fait un peu plus d'un tour par seconde. Au maximum, on peut considérer que 250 scans *successifs* regardent la même région du ciel. La couverture du ciel par COSMOSOMAS est représentée par la Fig. D.1 dans l'appendice D page 205.

3. ANALYSE PRÉLIMINAIRE DES DONNÉES

La prise de données a commencé au mois de mai 1999. Ces premières données ont surtout servi à stabiliser l'expérience du point de vue des détecteurs, de la cryogénie et de l'électronique d'acquisition. L'analyse a montré la présence d'un effet systématique de très grande amplitude probablement dû au rayonnement thermique issu du sol. Il a été décidé d'isoler l'expérience du sol en posant un bouclier thermique. Cette précaution s'est avérée très fructueuse puisque l'amplitude de l'effet systématique a été divisée par un facteur 5. Dans la suite, nous ne parlerons que des données récentes, en présence du bouclier thermique.

3.1 *Allure des données*

Les données sont prises à la cadence de 225 Hz. La carte d'acquisition ne permet pas de stocker l'ensemble des données brutes (cela représente 230 Mo par jour). La méthode utilisée pour réduire ces données est de moyenner 30 scans consécutifs en un cercle puis de stocker sur disque dur les 212 premières harmoniques de Fourier du signal (fichier de 10 Mo).

Après reconstruction, nous avons environ 3000 cercles de 212 échantillons. Comme les cercles ont une ouverture de 20° , ils ont une longueur angulaire de 61.5° et sont donc échantillonnés tous les 0.29° en moyenne. Au premier abord, les données présentent des oscillations très importantes correspondant à une fréquence de 50 Hz. Cette contribution est celle de l'alimentation électrique et peut être soustraite par filtrage dans l'espace de Fourier sans retirer de signal puisque la fréquence de rotation est de 1.08 Hz (50 n'est pas multiple de 1.08). C'est cette solution que nous avons adoptée dans cette analyse mais il serait préférable de soustraire le 50 Hz plus en amont dans la chaîne de la prise de données (nous avons proposé différents moyens d'y parvenir à la collaboration).

La deuxième étape de nettoyage consiste à couper les données correspondant à l'observation du Soleil ou de la Lune. Les rares cercles défectueux sont également coupés (il y en a typiquement 5 ou 6 sur 3000).

Ces deux étapes terminées, les données restantes sont directement exploitables (voir Fig. 3.1). Les figures présentées dans cette partie ont été construites à partir des données prises le 1^{er} février 2000, avec le canal à 13 GHz. Comme annoncé précédemment, le signal présente au premier ordre un effet systématique périodique. L'amplitude de cet effet est 5 fois plus faible grâce au bouclier thermique recouvrant le sol. Il reste cependant largement dominant.

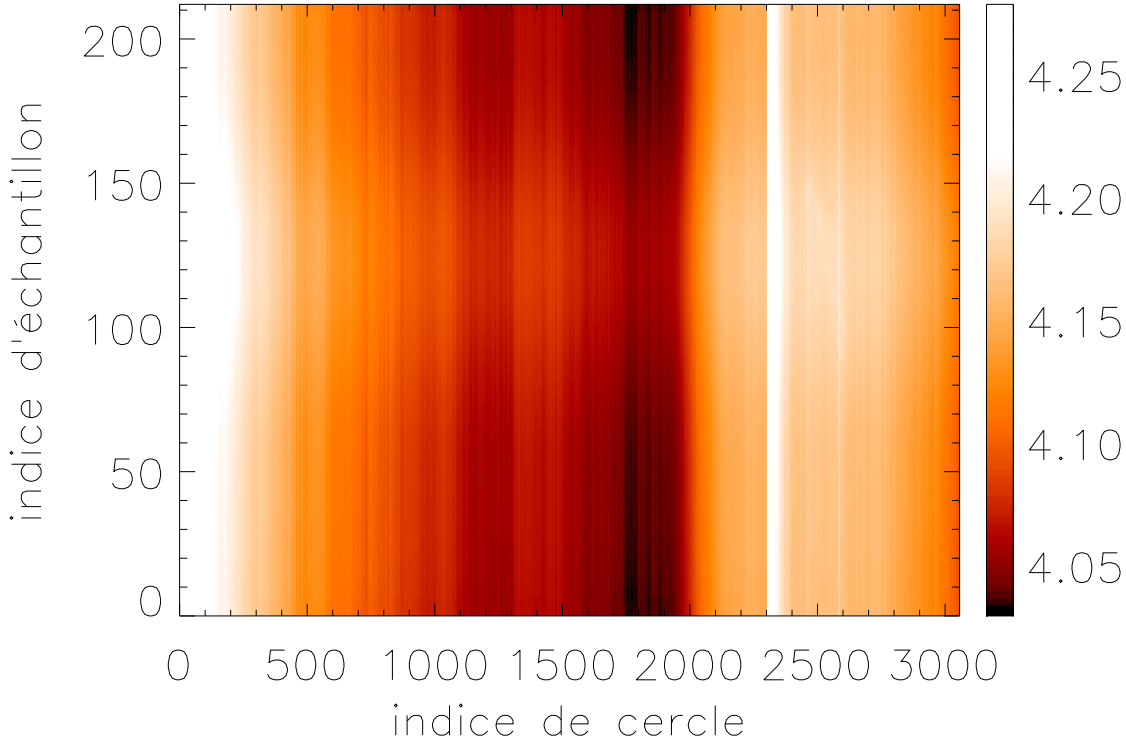


Fig. 3.1: Données après filtrage du 50 Hz et soustraction des mauvaises données.

3.2 Destriage

Nous voulons retirer des données la contribution instrumentale au niveau moyen de chaque cercle ainsi que l'effet systématique, dû en grande partie à l'atmosphère. La difficulté est de séparer les contributions du ciel (à conserver), de l'atmosphère (à soustraire) et de l'instrument (à soustraire).

Le destriage effectué ici est plus simple que celui présenté dans la deuxième partie de cette thèse. Il ne consiste pas à utiliser les intersections pour contraindre le signal. Nous utilisons ici le fait que la *forme* de l'effet systématique est pratiquement constante. Après avoir éliminé dans un premier temps les dérives très basse fréquence en mettant la moyenne de chaque cercle à 0, apparaît l'effet systématique synchrone (voir Fig. 3.2). Nous désignerons la forme estimée de l'effet systématique par le mot anglais abondamment utilisé, *template* (signifiant gabarit).

Le point important ici est la détermination de la forme du template. Nous allons pour cela modéliser les mesures $m_{i,k}$ du cercle i au point k de la façon suivante :

$$m_{i,k} = \underbrace{O_i}_{\text{niveau moyen du cercle } i} + \underbrace{a_i y_k}_{\text{amplitude } \times \text{template}} + \underbrace{s_{i,k}}_{\text{contribution du ciel}} . \quad (3.1)$$

Le niveau moyen O_i de chaque cercle étant dû au ciel (atmosphère et source astrophysique).

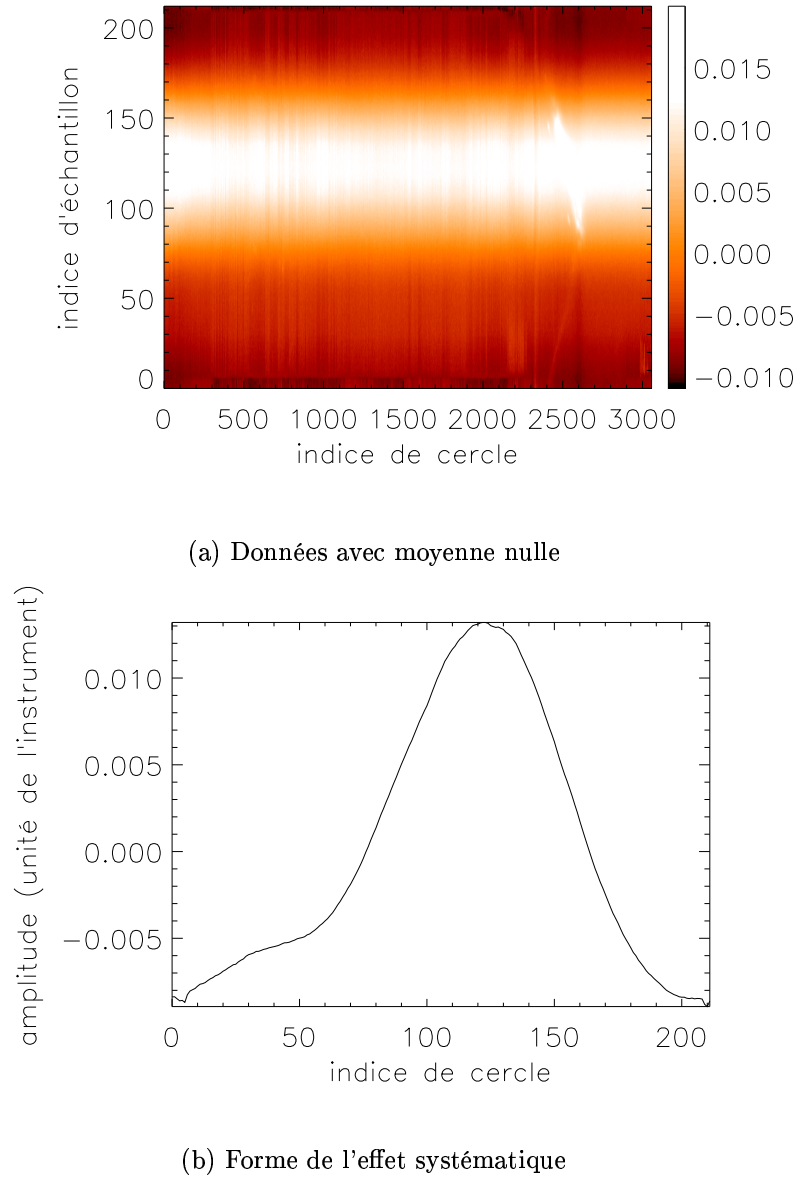


Fig. 3.2: Détermination de la forme de l'effet systématique. À partir des données brutes, nous avons mis chaque cercle à zéro en lui soustrayant sa moyenne. Les sources apparaissent et nous voyons que la forme de l'effet systématique est pratiquement constante (figure (a)). Nous pouvons la déterminer grossièrement en calculant la moyenne des données à *position angulaire fixée* le long des cercles (figure (b)).

sique¹) et au bruit instrumental. La contribution du template y_k (dont la valeur ne dépend que de la position angulaire k le long des cercles) au signal total est modulée par une amplitude pouvant varier d'un cercle à l'autre afin de prendre en compte d'éventuelles variations de gain dans le détecteur avec le temps. Enfin, nous ajoutons bien évidemment la contribution du ciel $s_{i,k}$.

La démarche consiste à estimer les niveaux moyens O_i et les amplitudes a_i étant donné le template y_k . L'important est de bien déterminer ce template. Pour cela, nous procédons

¹ Un cercle voyant une source aura un niveau moyen plus élevé qu'un autre n'en voyant pas.

de façon itérative en utilisant des cartes de poids nous permettant de séparer les sources du fond de ciel (voir Fig. 3.3). Pour la première itération, toutes les mesures contribuent avec le même poids puisque nous ne savons pas encore ce qui se trouve dans les données. Nous allons utiliser trois cartes différentes : la carte des données brutes, $m_{i,k}$, la carte des données brutes avec les cercles mis à moyenne nulle $z_{i,k}$ et la carte de résidus $r_{i,k}$ obtenue en soustrayant à $m_{i,k}$ les niveaux moyens et les contributions du template. Les itérations passent par les étapes suivantes :

1. à partir des données brutes $m_{i,k}$, nous ajustons pour chaque cercle i son niveau moyen O_i ainsi que l'amplitude a_i étant donné y_k nouvellement déterminé ;
2. nous construisons la carte de *résidus* $r_{i,k}$. La carte obtenue, de plus en plus "propre", nous permet d'en déduire une nouvelle carte de poids. La carte de poids s'obtient de la façon suivante : pour chaque position angulaire k le long des cercles, nous faisons un histogramme des valeurs $r_{i,k}$. Nous ajustons ensuite sur cet histogramme une gaussienne (représentant le fond du ciel) ainsi qu'un polynôme (représentant les sources astrophysiques). Nous affectons un poids nul aux points distants de plus de quelques σ (typiquement 2 ou 3) de la moyenne de la gaussienne. Les autres points ont un poids égal à l'unité ;
3. en utilisant cette nouvelle carte de poids, nous faisons de nouveau un histogramme des valeurs $z_{i,k}$ associées à un poids non nul, à k fixé. Nous ajustons une gaussienne sur ces valeurs et la moyenne nous donne la valeur y_k du template au point k . De cette façon, les sources altèrent de moins en moins le template au cours de l'itération ;
4. nous retournons à l'étape numéro 1.

Les cartes de données obtenues ne sont pas encore satisfaisantes. Il reste un effet systématique très basse fréquence le long de chaque cercle. Sans rien modifier au principe de la méthode, nous avons modélisé les données de la façon suivante :

$$m_{i,k} = O_i + a_i y_k + b_i \sin \phi_k + c_i \cos \phi_k + s_{i,k}.$$

Les fonctions sin et cos sont là pour prendre en compte les dérives basses fréquences résiduelles. Les angles ϕ_k sont les positions angulaires des échantillons k le long de chaque cercle. Pour simplifier, et cela n'a aucune influence sur les résultats, nous supposons que le premier échantillon $k = 0$ se trouve à l'angle $\phi_0 = 0$ correspondant au point du cercle de plus haute déclinaison, c'est-à-dire le plus au Nord (terrestre). Ce choix est complètement arbitraire.

Les niveaux moyens O_i ainsi que les amplitudes a_i , b_i et c_i sont déterminées selon le même procédé itératif et la carte de résidus obtenue est cette fois-ci très satisfaisante (voir Fig. 3.4). Nous vérifions que les amplitudes b_i et c_i sont petites devant les amplitudes a_i , ce qui justifie notre hypothèse consistant à ajouter un sinus et un cosinus comme *perturbation* au template. Le processus que nous venons de décrire converge après 5 ou 6 étapes et les données obtenues sont suffisamment propres pour en faire une carte du ciel.

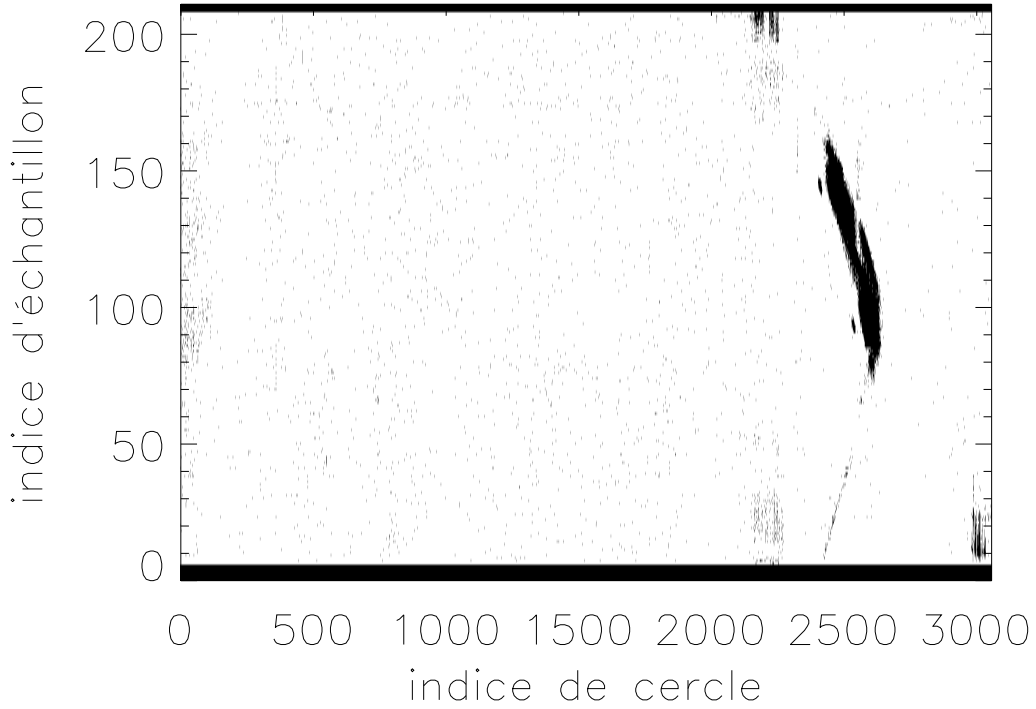


Fig. 3.3: Carte de poids obtenue après 10 itérations. Les régions noires ont un poids nul et les blanches un poids égal à 1. La carte de poids nous permet de localiser les endroits du ciel où se trouve une source. De cette façon, la détermination du template n'est pas contaminée par ces sources et ne contient que la contribution de l'atmosphère et du bruit instrumental. La carte de poids est grossièrement le négatif de la carte de résidus (comparer avec la Fig. 3.4). Dans le fichier de données utilisé dans cette analyse, les premiers et derniers échantillons de chaque cercle sont défectueux (raison pour le moment inconnue), c'est pourquoi leur poids est mis à zéro.

3.3 Fabrication de la carte du ciel

Pour faire une carte du ciel, nous devons être capables d'associer à chaque échantillon une direction sur le ciel aussi précise que possible.

Jusqu'à maintenant, nous avons supposé arbitrairement que le premier échantillon (numéroté 0) était celui qui se trouvait à la déclinaison maximale. Cette hypothèse n'est en général pas vraie et il nous faut déterminer le décalage en phase pour l'ensemble des cercles. Ce décalage provient du fait que lorsque l'on commence une prise de données, on ne repère pas la position initiale du miroir par rapport au détecteur. On la détermine a posteriori à partir des données et c'est ce que nous expliquons dans cette partie.

3.3.1 Recalage de la phase

À partir d'une source ponctuelle

Au cours du balayage les cercles restent à déclinaison constante ; ceci a pour conséquence qu'une source astrophysique ponctuelle est vue à deux moments différents t_s et $t_s + \Delta t$ correspondant à des positions angulaires telles que leur somme doit être égale à

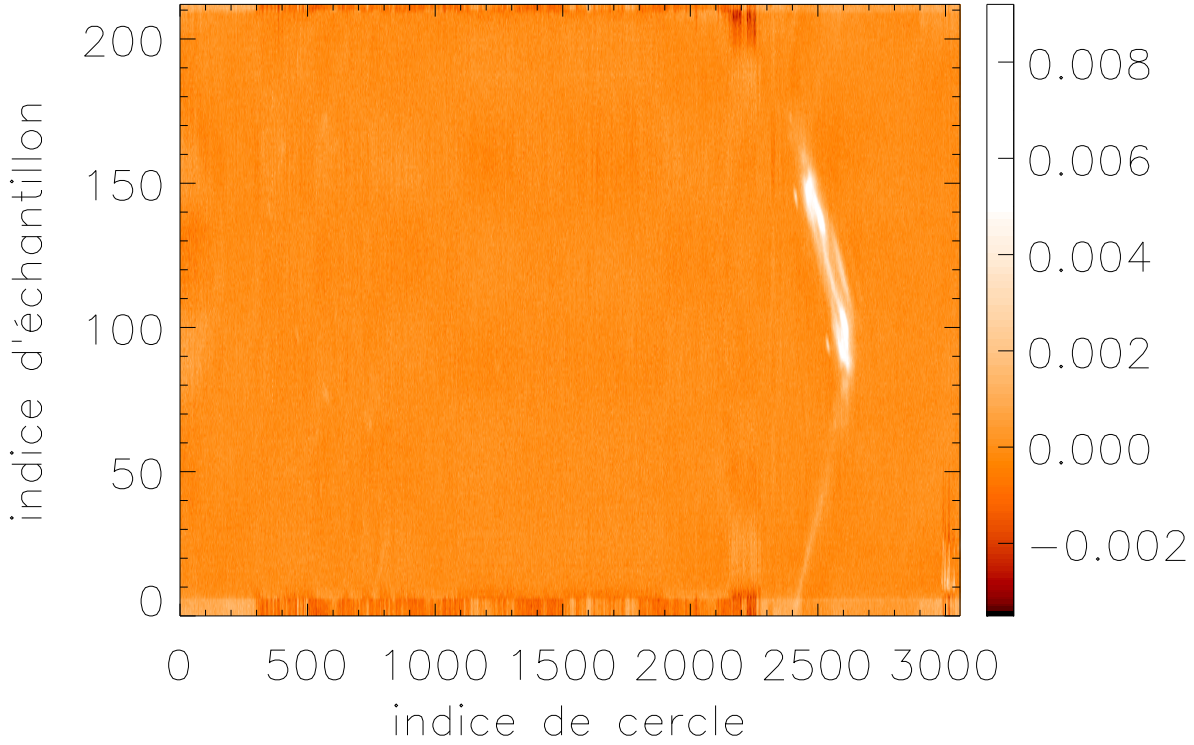


Fig. 3.4: Résidus obtenus après 10 itérations. La forme du template est, après 10 itérations, stable (l'algorithme est convergent), ainsi que la valeur du niveau moyen de chaque cercle. La carte des résidus associée est très propre. Les sources sont nettement visibles. Les premiers et derniers échantillons de chaque cercle sont mauvais (problème instrumental sur ce fichier) et n'ont pas été pris en compte dans les calculs.

2π (voir Fig. 3.5). Il est alors aisé de montrer que le décalage en phase est donné par :

$$\Delta\phi = 180^\circ \left(1 - \frac{\phi_s(t_s) + \phi_s(t_s + \Delta t)}{n_{\text{ech}}} \right)$$

où n_{ech} est le nombre d'échantillons par cercle. L'échantillon 0 que nous supposons en $\phi = 0$ (point de plus haute déclinaison) est donc en réalité en :

$$\phi_0 = \Delta\phi \quad \text{ou} \quad \phi_0 = 180^\circ + \Delta\phi.$$

La dégénérescence est levée dès lors que l'on connaît la déclinaison de la source observée, ce qui est toujours le cas en pratique. Cette méthode a le mérite d'être précise car pour déterminer les angles $\phi_s(t_s)$ et $\phi_s(t_s + \Delta t)$ il suffit d'ajuster sur l'image de la source dans les données une gaussienne à 2 dimensions aux deux moments où elle est visible.

À partir de la galaxie

Si aucune source ponctuelle n'est visible dans les données et que nous ne voyons que la galaxie, il est encore possible de calculer la phase mais la méthode est moins précise

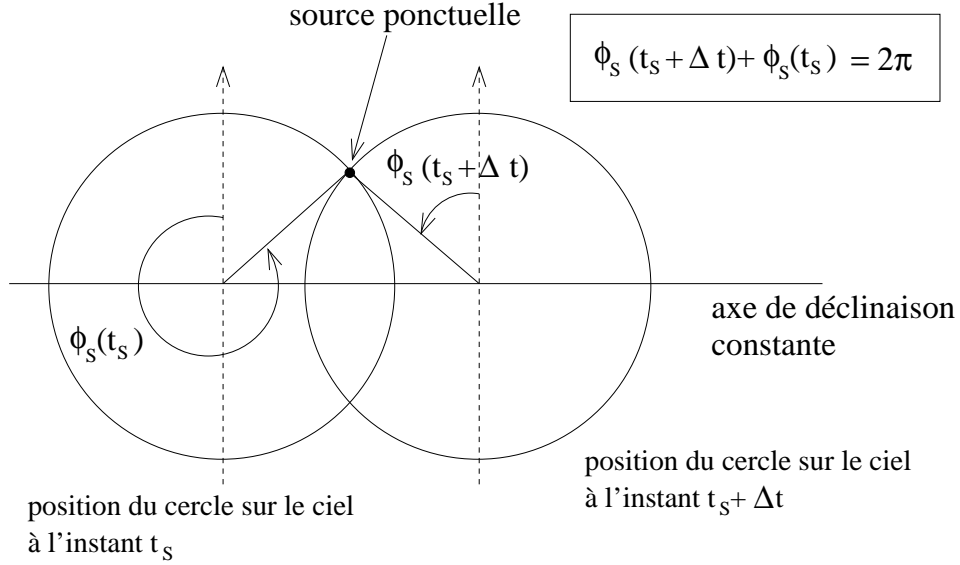


Fig. 3.5: Détermination de la phase arbitraire à partir d'une source ponctuelle. Le calcul de la phase arbitraire est indispensable pour faire une carte du ciel. Nous utilisons le fait qu'en balayant le ciel à déclinaison constante, une source ponctuelle doit être vue de telle manière que la somme de ses positions angulaires doit être égale à 2π . Cette disposition est *symétrique* lorsque l'on compte les angles à partir du point de plus haute déclinaison.

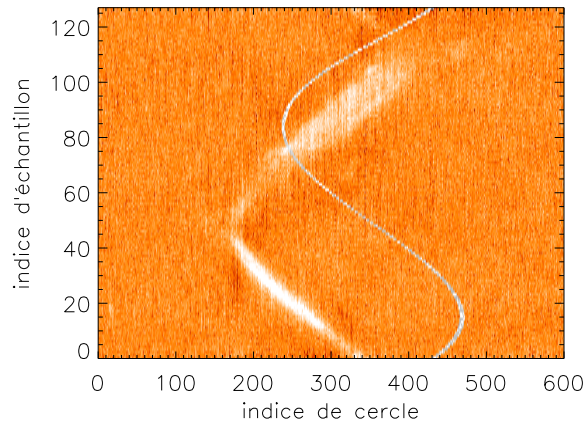


Fig. 3.6: Détermination de la phase à partir de la galaxie. La galaxie apparaît dans les données sous la forme d'un sinus avec une phase. La position attendue (courbe blanche régulière) dans l'hypothèse où l'échantillon 0 se trouve en $\phi_0 = 0$ est déphasée par rapport à la position observée (le déphasage en temps selon x provient d'un problème d'horloge à l'époque et n'influe pas sur le calcul de la phase selon y). Il suffit d'extraire les courbes correspondant aux positions observées et attendues et de calculer le déphasage (voir Fig. 3.7).

que dans le cas d'une source ponctuelle. La galaxie est approximativement plane et elle apparaît dans les données² (voir Fig. 3.6) sous la forme d'une fonction sinus (avec une phase). Cette figure correspond à un fichier de données ancien (mai 1999).

Pour calculer le déphasage entre la galaxie observée et la galaxie attendue, nous déterminons, pour chaque échantillon k les indices de cercle voyant un signal fort (signe de

² À cette époque, nous avons 128 échantillons par cercle.

la présence de la galaxie). Pour déterminer ces indices de cercle, nous procédons de la façon suivante : pour chaque échantillon k , nous affichons toutes les valeurs sur les cercles et essayons d'ajuster une gaussienne³ rendant compte de la galaxie sur ces mesures (le fond de ciel apparaît plat). Cet ajustement est parfois impossible, par exemple lorsque l'émission de la galaxie n'est pas nettement supérieure au niveau moyen du fond du ciel ; dans ce cas les points obtenus peuvent être très éloignés de la position réelle de la galaxie (par exemple pour les échantillons d'indices compris entre 110 et 127, à comparer avec le signal galactique pour ces indices dans la Fig. 3.6) et nous leur attribuons un poids nul. Inversement, les points qui sont bien séparés du fond du ciel ont un poids égal à l'unité et

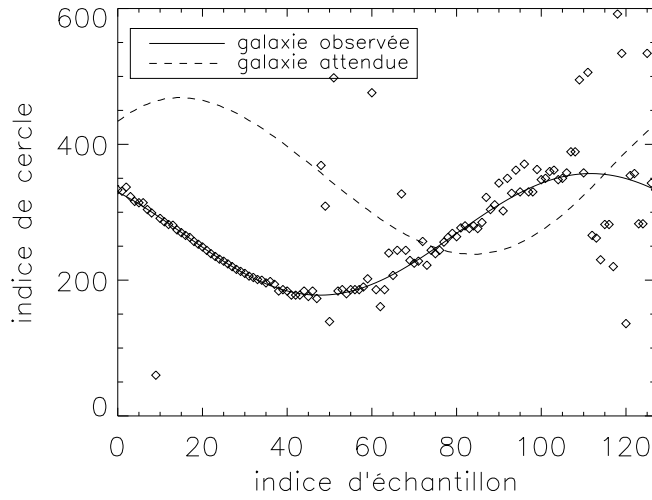


Fig. 3.7: Calcul du déphasage entre la galaxie observée et la galaxie attendue Les losanges représentent les points se trouvant *probablement* dans la galaxie. La courbe continue est un ajustement d'une fonction sinus sur ces points auxquels ont été attribués des poids (lire le texte pour les détails).

nous essayons d'ajuster une fonction sinus sur ces points. Le résultat est représenté par la courbe continue.

La courbe attendue selon notre hypothèse de phase $\phi_0 = 0$ est représentée par la courbe tiretée. Le déphasage entre ces deux courbes est calculé en déphasant continûment l'une des courbes par rapport à l'autre et en déterminant pour quelle phase la corrélation est maximale. La phase correspondante est la valeur du déphasage recherché.

3.3.2 Carte du ciel

Une fois connue la phase aléatoire, nous pouvons construire la carte du ciel. Il faut pour cela écrire la loi de la réflexion sur le miroir plan en rotation sachant qu'un rayon lumineux n'arrive sur le détecteur que s'il quitte le miroir plan avec l'angle θ_{dish} (voir Fig. 2.1). Les rayons détectés proviennent des directions $\hat{\mathbf{u}}(t)$ telles que :

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = 2(\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}(t)) \hat{\mathbf{n}}(t) - \hat{\mathbf{v}}$$

où les vecteurs $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{v}}$ et $\hat{\mathbf{n}}$ sont définis dans la Fig. 2.1.

La projection des données en carte du ciel se fait pour le moment de façon classique : tous

³ Ce n'est pas un histogramme !

les échantillons tombant dans le même pixel du ciel sont moyennés et la valeur obtenue est la valeur du ciel en ce pixel. La projection des données destriées de la Fig. 3.4 est montrée dans la Fig. 3.8. Les données exploitées ici couvrent la région du Cygne. La

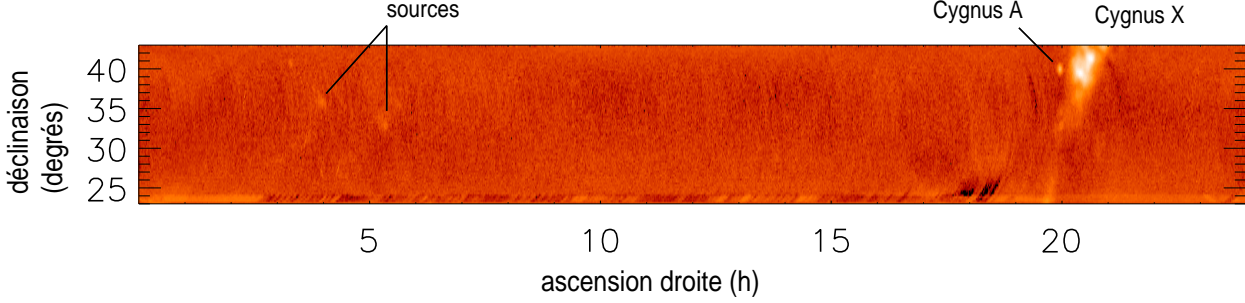


Fig. 3.8: **Carte du ciel obtenue à partir de la Fig. 3.4.** Après le calcul de la phase arbitraire, nous pouvons construire la carte du ciel. Les pixels ont pour dimensions $0.25^\circ \times 0.25^\circ$ (nous avons ici 1440×81 pixels). La carte couvre 24 heures (en ascension droite) et les déclinaisons 22° à 42° . Les données ont été légèrement suréchantillonnées de façon à ce chaque pixel ait été vu au moins une fois.

source ponctuelle visible à une ascension droite d'environ 20 heures et de déclinaison proche de 40° est Cygnus A. L'ensemble très lumineux à droite est le complexe Cygnus X. Cygnus A et X se trouvent dans le plan de la Voie Lactée (comparer avec la position moyenne de la Voie Lactée en coordonnées équatoriales dans l'appendice D page 205).

3.4 Étude du lobe de l'instrument

Nous déterminons le lobe en faisant l'image d'une source ponctuelle, comme Cygnus A. Nous voyons cette source dans les données à deux moments différents, comme nous l'avons vu précédemment. Ceci nous permet d'étudier le lobe pour deux positions différentes symétriques du miroir par rapport aux détecteurs et donc de tester la qualité de l'alignement. Nous commençons par isoler les portions de données qui voient la source puis nous agrandissons l'image de la source, ce qui est montré dans les Figs. 3.9(a) et 3.9(b). Nous ajustons sur chacun de ces lobes une gaussienne à deux dimensions non circulaire ; les résultats sont montrés dans les Figs. 3.10. L'ajustement est très bon (nos lobes sont donc gaussiens, ce qui est très positif) et les meilleurs ajustements sont obtenus avec les gaussiennes caractérisées par :

$$B_i(x', y') = \frac{1}{2\pi\sigma_{x'}^i\sigma_{y'}^i} e^{-\left(\frac{x'^2}{\sigma_{x'}^i{}^2} + \frac{y'^2}{\sigma_{y'}^i{}^2}\right)}, \quad i = 1, 2$$

$$\text{avec } \sigma_{x'}^1 = 0.36^\circ, \sigma_{y'}^1 = 0.43^\circ,$$

$$\text{et } \sigma_{x'}^2 = 0.40^\circ, \sigma_{y'}^2 = 0.34^\circ$$

correspondant à

$$\boxed{\text{FWHM}_{x'}^1 = 0.84^\circ, \text{FWHM}_{y'}^1 = 1.01^\circ} \quad (3.2)$$

et

$$\boxed{\text{FWHM}_{x'}^2 = 0.94^\circ, \text{FWHM}_{y'}^2 = 0.82^\circ} \quad (3.3)$$

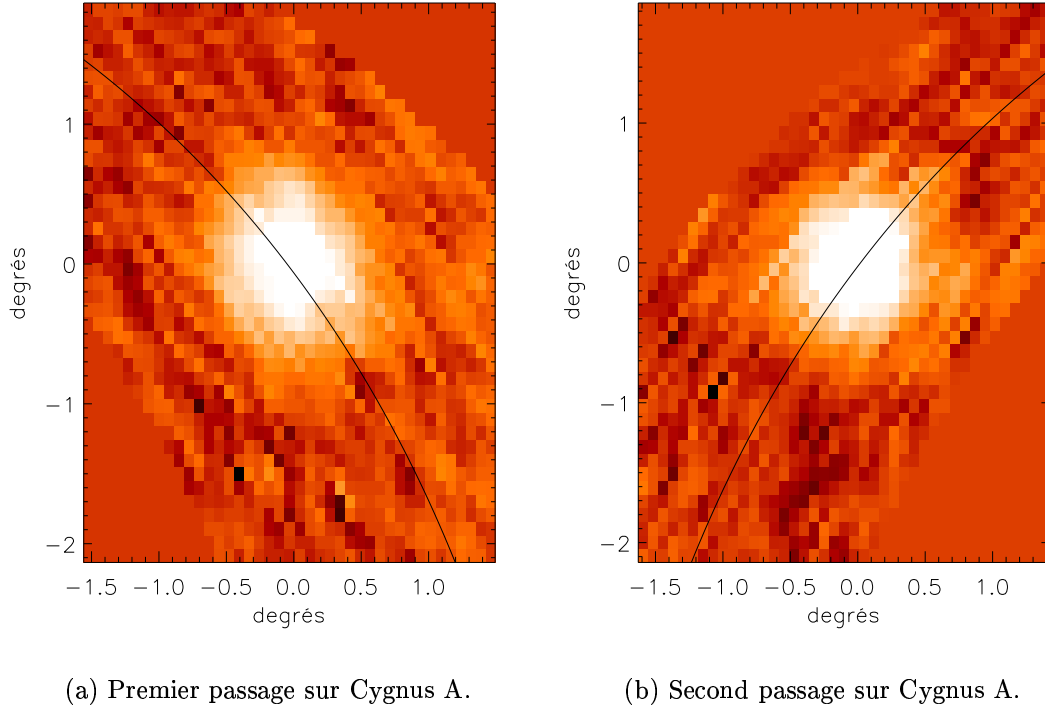


Fig. 3.9: Observations de Cygnus A. Les images obtenues donnent une image du lobe correspondant à deux positions différentes du miroir plan en rotation par rapport au détecteur. La ligne superposée dans chaque figure indique la direction dans laquelle le balayage s'effectue. Les données représentées ici ont été suréchantillonnées.

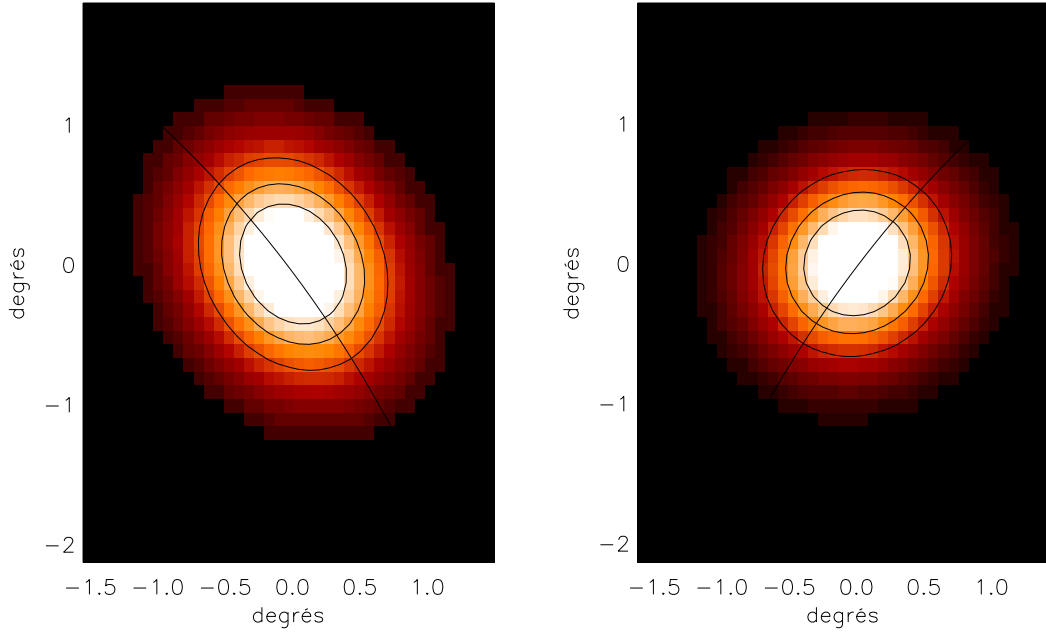
dans un système de référence *tourné* défini par :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & \sin \alpha_i \\ -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha_1 \sim 39^\circ \quad \text{et} \quad \alpha_2 \sim 24^\circ.$$

Lorsque, plus tard, nous voudrions faire l'analyse des fluctuations de température du CMB, il sera très utile d'approximer nos lobes par des lobes gaussiens *symétriques*. Pour cette raison, il est intéressant de comparer nos lobes aux lobes gaussiens symétriques les plus proches. Ces ajustements sont montrés dans les Figs. 3.11. Afin d'estimer l'erreur commise en approxinant nos lobes réels par des lobes gaussiens symétriques, il nous faut étudier l'évolution du flux reçu en fonction de l'ouverture. Ce procédé s'appelle *photométrie d'ouverture* et permet de quantifier la quantité de lumière reçue. Les résultats sont présentés dans les Figs. 3.12. Ces figures montrent que l'erreur commise est faible (le calcul montre qu'elle est de l'ordre du pourcent).

3.5 Calibration sur la source Cygnus A

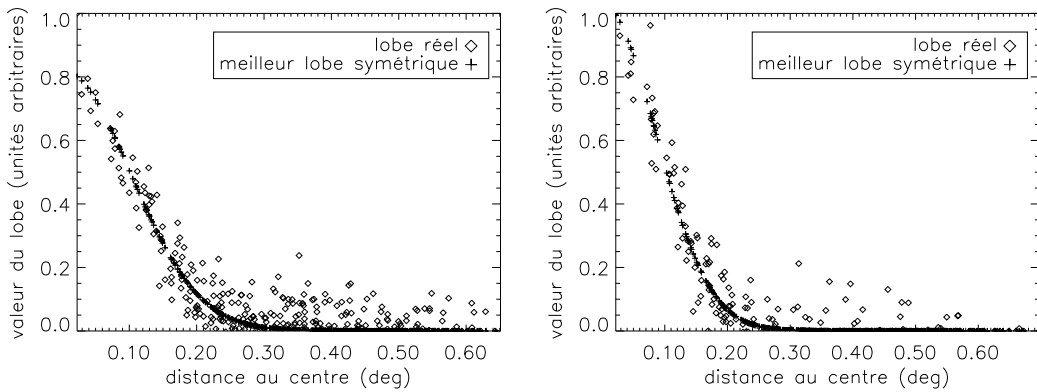
Il est possible de calibrer un instrument sur une source ponctuelle dont le flux est connu dès lors que le lobe de l'instrument est connu. Nous voulons déterminer le coefficient de calibration α permettant de convertir l'unité de mesure de l'instrument (proportionnel à des Volts et que nous noterons "ud") en température. Nous expliquons dans cette partie comment nous nous calibrons sur Cygnus A.



(a) Ajustement d'une gaussienne sur le lobe lors du premier passage sur Cygnus A.

(b) Ajustement d'une gaussienne sur le lobe lors du second passage sur Cygnus A.

Fig. 3.10: Ajustement de gaussiennes 2D non symétriques sur les lobes. L'ajustement des gaussiennes 2D non symétriques sur les lobes est très bon. Nous voyons que le lobe diffère selon la direction de balayage. L'ajustement a été réalisé sur les lobes suréchantillonnés.



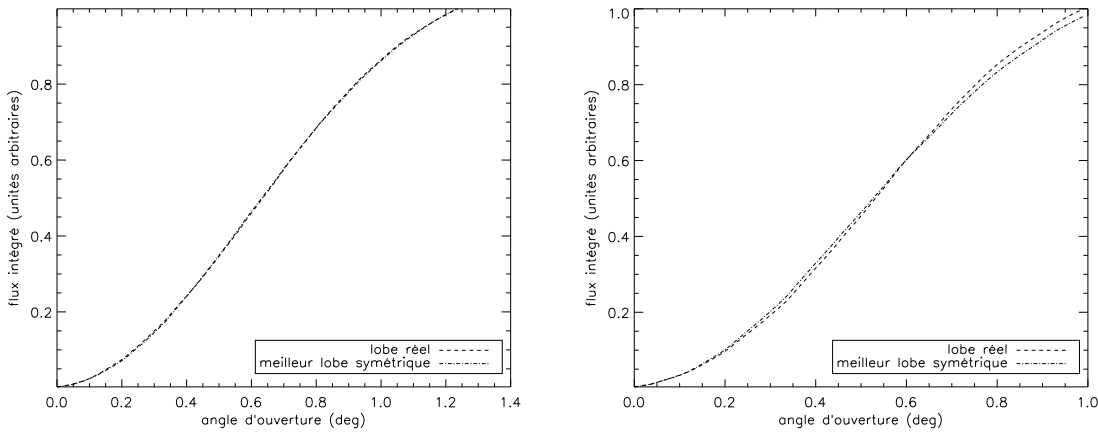
(a) Ajustement sur le premier lobe

(b) Ajustement sur le second lobe

Fig. 3.11: Comparaison de nos lobes avec des lobes gaussiens symétriques. Nous avons tracé la répartition des points des lobes en fonction de leur distance aux centres.

3.5.1 Correction des variations du gain

Nous allons tout d'abord utiliser un signal supplémentaire (dit signal de calibration), représentant les variations du gain au cours du temps. En effet, l'électronique d'acquisition et de mesure de l'expérience est soumise à des fluctuations (occasionnées par exemple par



(a) Comparaison des flux intégrés en fonction de l'ouverture (lobe 1).

(b) Comparaison des flux intégrés en fonction de l'ouverture (lobe 2).

Fig. 3.12: Photométrie d'ouverture comparative entre nos lobes réels et des lobes gaussiens symétriques.

la décharge des batteries d'alimentation) se traduisant par des instabilités dans le gain du détecteur. Pour la calibration, il est essentiel de savoir comment il varie. Le signal de calibration consiste à ajouter périodiquement au signal provenant du ciel un autre signal connu (un créneau dans notre cas) dont la trace peut facilement être retrouvée après son passage dans l'électronique de lecture. La comparaison du signal en entrée et du signal en sortie permet d'estimer la valeur du gain à ce moment. Dans les fichiers de données, nous avons une valeur de gain par cercle, c'est-à-dire une valeur toutes les 30 secondes environ. Il suffit alors de diviser les données brutes par le gain pour avoir des données corrigées des variations du gain (elles sont donc "à gain constant"). C'est sur ces données que nous pouvons calibrer l'instrument.

3.5.2 Température d'antenne et émission de Cygnus A

Considérons une source ayant une température de brillance T_S . Cette température est reliée à l'émission par :

$$B_\nu(T_S) = \frac{2kT_S}{c^2} \nu^2 \quad \text{W.m}^{-2}.\text{Hz}^{-1}.\text{sr}^{-1} ;$$

c'est la formule du corps noir écrite dans le domaine de Rayleigh-Jeans ($h\nu \ll kT$, nous observons des ondes centimétriques). Le flux émis intégré sur l'angle solide sous-tendu par la source est donné par :

$$B_\nu(T_S)\Omega_S = \frac{2kT_S}{c^2} \nu^2 \Omega_S \quad \text{W.m}^{-2}.\text{Hz}^{-1} \quad (3.4)$$

$$\cong S(\text{Jy}) \times 10^{-26} \quad \text{W.m}^{-2}.\text{Hz}^{-1}. \quad (3.5)$$

Le flux S de Cygnus A, exprimé en Jansky (Jy) est bien connu (voir Fig. 3.13). La formule permettant d'estimer le flux du signe pour des fréquences comprises entre 2 GHz

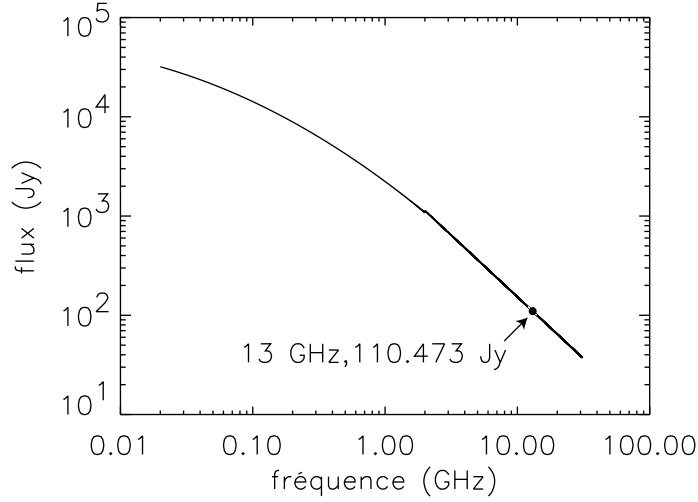


Fig. 3.13: **Spectre de Cygnus A.** L'émission de Cygnus A à 13 GHz est de l'ordre de 100 Jy.

et 31 GHz est (Baars et al., 1977) :

$$\begin{aligned} \log S(\text{Jy}) &= a + b \log \nu(\text{MHz}) \\ \text{avec } a &= 7.161 \pm 0.053 \\ \text{et } b &= -1.244 \pm 0.014. \end{aligned}$$

Dans notre cas, le flux à 13 GHz est donc de :

$$S = 110.47^{+32.03}_{-24.83} \text{ Jy} \quad \text{d'où une erreur de 30 \%}.$$

Une source de température T_S induit dans l'antenne un signal appelé température d'antenne. Cette température est définie de la façon suivante : c'est la température T_A d'un corps noir qui entourerait complètement l'antenne et induirait la même puissance de bruit que la source de température T_S . La puissance reçue du corps noir par l'antenne est donnée par (voir Eq. 3.4) :

$$P = \frac{2 k \nu^2}{c^2} T_A \Omega_A \hat{=} \frac{2 k \nu^2}{c^2} T_S \Omega_S$$

où Ω_A est la taille du lobe de l'antenne. D'autre part, la puissance émise par la source étant proportionnelle à $T_S \Omega_S$, la température s'exprime simplement en fonction des caractéristiques de la source et de l'antenne et prend la forme :

$$T_A = \frac{\Omega_S}{\Omega_A} T_S \equiv \frac{c^2}{2 k \nu^2 \Omega_A} S \times 10^{-26} \text{ K}.$$

Nous avons dans les données deux mesures de Cygnus A correspondant à deux lobes différents. Nous définissons un lobe moyen $\tilde{\Omega}$ par :

$$\frac{2}{\tilde{\Omega}} = \frac{1}{\Omega_1} + \frac{1}{\Omega_2}$$

avec $\Omega_i = 2\pi\sigma_{x'}^i\sigma_{y'}^i$, $i \in \{1, 2\}$. La température d'antenne moyenne attendue est donc de :

$$T_A = \frac{c^2}{2 k \nu^2} S \times 10^{-26} \frac{1}{\tilde{\Omega}} \text{ K} \quad (3.6)$$

et l'erreur sur cette estimation est donnée formellement par :

$$\frac{\sigma_{T_A}^2}{T_A^2} = \frac{\sigma_S^2}{S^2} + \frac{\sigma_{\frac{1}{\Omega}}^2}{\frac{1}{\Omega^2}}$$

Nous ne disposons que de deux mesures du lobe. Le calcul de $\sigma_{\frac{1}{\Omega}}$ est donc approximatif ; le meilleur estimateur de cette quantité avec seulement nos deux mesures Ω_1 et Ω_2 est donné par :

$$\sigma_{\frac{1}{\Omega}}^2 \sim \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\Omega_1} - \frac{1}{\Omega_2} \right)^2$$

dont on peut estimer la valeur en introduisant la mesure des lobes et nous obtenons :

$$\frac{\sigma_{\frac{1}{\Omega}}^2}{\frac{1}{\Omega^2}} \sim 0.003.$$

La contribution à l'erreur sur la température d'antenne de l'erreur sur le flux de la source est :

$$\frac{\sigma_S^2}{S^2} \sim \frac{32^2}{110^2} \sim 0.08 ;$$

l'erreur sur le flux de la source (que nous ne pourrions pas réduire) est donc largement dominante devant celle sur le lobe. Finalement, l'erreur totale sur la température d'antenne est donc :

$$\frac{\sigma_{T_A}}{T_A} \sim 0.3,$$

ce qui nous donne :

$$T_A = 76 \pm 23 \text{ mK}.$$

Cela signifie que l'observation de Cygnus A par notre instrument doit correspondre à une valeur de T_A mK. La valeur maximale observée, en unité des données est de 0.0034 ± 0.0002 ud (c'est le maximum du meilleur ajustement gaussien du lobe). Le bruit blanc de la carte a une rms de 0.0002 ud. Nous en déduisons le coefficient de calibration :

$$\alpha = \frac{76 \pm 23 \text{ mK}}{0.0034 \pm 0.0002} = 22 \pm 6 \text{ K.ud}^{-1}.$$

Le problème apparaissant dans cette détermination est que la rms du bruit blanc dépend de la pixélisation. Ce n'est pas trop gênant dans ce cas car la source d'erreur dominante est celle sur le flux de la source.

Il est également possible de déterminer le coefficient de calibration en utilisant le flux total plutôt que le flux au maximum. C'est même en général meilleur car on utilise l'information contenue dans l'ensemble du lobe, pas seulement en un point. Le problème de l'estimation de la valeur maximale du flux ne se pose plus. On montre qu'il est donné par :

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{\Omega_S T_S}{\int \text{flux}(x, y) dx dy} = \frac{\Omega_S T_S}{\sum_{i,j} \text{flux}(i, j) \Delta_i \Delta_j} \\ &= \frac{\frac{c^2}{2k\nu^2} S \times 10^{-26}}{\Omega_{\text{pix}} \sum_{i,j} \text{flux}(i, j)}, \end{aligned}$$

où Ω_{pix} est la taille d'un pixel de la carte du ciel et $\Omega_S T_S$ est donné dans les Eqs. 3.4 et 3.5. L'erreur sur ce coefficient de calibration est largement dominée par celle sur le flux de la source et nous trouvons une valeur α' correspondant au flux total moyen :

$$\alpha' = \frac{2.1 \times 10^{-5} \pm 6.1 \times 10^{-6}}{9.4 \times 10^{-7}} = 22 \pm 6 \text{ K.ud}^{-1}.$$

Le coefficient moyen obtenu avec cette méthode donne une valeur parfaitement compatible avec la valeur obtenue en utilisant le maximum du flux.

Le bruit blanc de la carte a donc une rms de 4.4 ± 1.2 mK par pixel carré de $0.2^\circ \times 0.2^\circ$, ceci pour une seule journée de données et pour un seul canal. Si nous ramenons ce bruit à la taille d'un lobe (de l'ordre de 1 degré carré), nous trouvons :

$$\text{rms}(\text{bruit blanc}) = 880 \pm 240 \mu\text{K} \text{ par lobe.}$$

Ce résultat signifie qu'en une centaine de jours, et pour une résolution angulaire de 2 degrés, nous arrivons au niveau des anisotropies de température du CMB.

3.6 Conclusions et perspectives

L'analyse préliminaire des données de COSMOSOMAS sur une seule journée de données permet de calibrer l'instrument avec une erreur de 30 %, due à l'incertitude sur le flux de Cygnus A. Nous ne pouvons pas espérer nous calibrer à mieux de 30 % et il nous faut chercher d'autres sources ou d'autres façons de se calibrer.

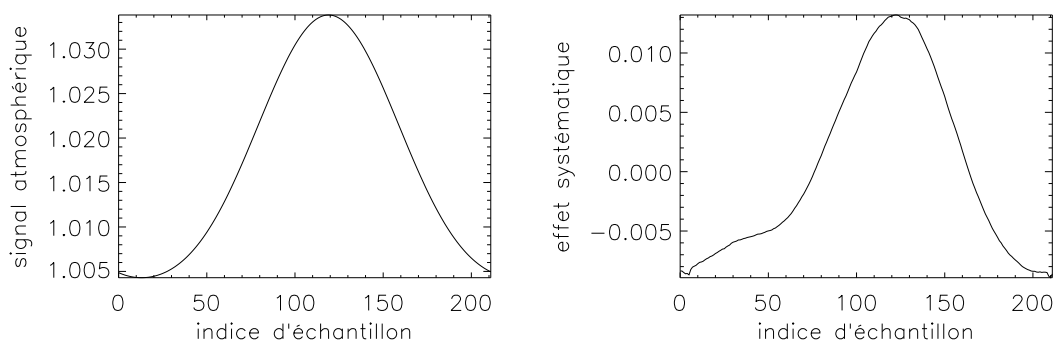
Avec cette calibration, nous avons montré que le bruit blanc de la carte avait une rms de l'ordre du millikelvin (avec des pixels de 0.04 degrés carré). Potentiellement, COSMOSOMAS a donc la sensibilité requise pour voir dans ses mesures le dipôle en un seul jour de données. Notons que dans la zone couverte par COSMOSOMAS, le dipôle a son amplitude maximale, de l'ordre de 6 mK. Cependant, la méthode de destriage utilisée ici retire ce dipôle (nous avons ajusté un sinus et un cosinus le long de chaque cercle et c'est justement la forme que prend le dipôle). L'intérêt majeur d'observer le dipôle est la possibilité de pouvoir faire une calibration sur une source étendue bien connue. Son observation dans les données constitue une prochaine étape dans l'analyse des données de COSMOSOMAS.

Rappelons que la prise de données a lieu pratiquement en continu, ce qui signifie qu'après un an d'acquisition, nous disposerons d'environ 1500 cartes (nous avons 4 canaux de fréquence et deux voies pour le canal à 10 GHz). Il est également prévu d'ajouter un canal à 30 GHz. Une analyse plus complète des données utilisera simultanément l'information provenant des différents canaux de fréquence. L'accumulation de données nous permettra d'avoir accès aux anisotropies du CMB.

Quant à l'émission polarisée de la galaxie, nous avons proposé à la collaboration de modifier le cryostat de façon à pouvoir tourner à la demande l'ensemble de détection. Rappelons que pour mesurer les paramètres de Stokes du rayonnement, nous avons besoin de faire au moins 3 mesures à 3 angles différents. La position actuelle fixe du cryostat ne permet pas de faire ces mesures.

L'expérience que nous allons acquérir nous permettra de mieux comprendre l'effet systématique présent dans les données : sa corrélation avec l'atmosphère est très nette et n'a pas encore été exploitée (voir les Figs. 3.14).

En outre, nous pouvons espérer améliorer la qualité intrinsèque des données : le 50 Hz actuellement présent devrait prochainement être soustrait dès l'acquisition. Nous envisageons également de conserver l'intégralité des données, plutôt que les coefficients de Fourier moyennés. Nous pourrions tester des méthodes plus sophistiquées pour construire les cercles à partir des scans individuels.



(a) Effet de l'atmosphère.

(b) Effet systématique.

Fig. 3.14: Comparaison de l'effet systématique avec l'effet atmosphérique. L'effet atmosphérique provient du fait que l'épaisseur d'air traversé par un rayon lumineux dépend de sa direction d'incidence. Cette épaisseur est plus petite pour un rayon venant du zénith que pour un rayon venant de l'horizon. La courbe montrant la variation de cet effet le long des cercles est montrée dans la figure (a)⁵. L'effet systématique de la figure (b) est celui que nous avons soustrait dans l'analyse de données.

CONCLUSION

J'espère avoir convaincu le lecteur que la cosmologie se trouve à une époque charnière de son histoire. D'une part, les progrès théoriques accomplis ces 20 dernières années ont permis d'avoir une vision beaucoup plus cohérente de l'univers ; je pense particulièrement à l'inflation que j'ai décrite page 52. D'autre part, les progrès technologiques continuels, notamment liés à la détection du rayonnement, nous permettent aujourd'hui de sonder finement l'univers tel qu'il était quelques centaines de milliers d'années après le *Big-Bang* et même de contraindre les théories qui le décrivent dans ses 10^{-30} premières secondes d'existence.

Il existe beaucoup d'autres méthodes pour accéder aux paramètres cosmologiques. Par exemple, j'ai présenté les résultats des supernovæ de type Ia (page 21) ; ces explosions d'étoiles en fin de vie dont le fonctionnement n'est toujours pas vraiment compris, ont permis ces dernières années à la constante cosmologique d'être à nouveau d'actualité. Elle l'avait déjà été une première fois il y a près d'un siècle lorsqu'Einstein l'introduisit dans ses équations pour avoir une solution d'univers statique.

Le satellite PLANCK aura vraisemblablement un impact majeur dans notre compréhension de l'univers. Tout d'abord du point de vue cosmologique. En effet, le but majeur de la mission est de mesurer à des échelles angulaires de l'ordre de quelques minutes d'arc et sur tout le ciel les anisotropies de température du CMB, ainsi que sa polarisation, ceci avec une sensibilité de l'ordre du microKelvin. J'ai expliqué page 77 quelle information physique était contenue dans ce rayonnement fossile. Les performances annoncées du satellite devraient permettre une mesure pratiquement complète du spectre de puissance des anisotropies de température du CMB (certains physiciens parlent même de mesure définitive). Les simulations ont permis de montrer que la précision sur les paramètres cosmologiques que l'on pouvait attendre de PLANCK étaient de l'ordre du pourcent. La mesure des spectres de polarisation ne sera pas d'aussi bonne qualité car la polarisation, plus faible, est bien plus difficile à mesurer. J'espère que la méthode présentée page 109 s'avèrera intéressante en pratique.

Pour que PLANCK puisse tenir ses promesses, il faut que notre communauté soit capable de soustraire l'effet des avant-plans contaminants. Le destriage présenté page 139 prétend remplir ce rôle en ce qui concerne certains effets instrumentaux. Quant aux effets astrophysiques comme l'émission galactique qui n'est pas encore bien connue (particulièrement vrai pour sa composante polarisée), il nous reste encore quelques années pour améliorer nos connaissances. Des très nombreuses expériences⁶ en cours ou prévues devraient nous permettre d'avoir des cartes du ciel à différentes fréquences suffisamment précises (en résolution angulaire et en sensibilité) pour que nous puissions mieux comprendre les avant-plans astrophysiques se superposant au rayonnement fossile.

⁶ Par exemple, COSMOSOMAS, Archéops, BOOMRanG...

ANNEXE

A. POLYNÔMES DE LEGENDRE ET HARMONIQUES SPHÉRIQUES

Polynômes de Legendre P_ℓ^m et λ_ℓ^m

Polynômes de Legendre :

$$P_\ell(\cos \theta) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{d \cos^\ell \theta} (1 - \cos^2 \theta)^\ell$$

Polynômes de Legendre associés :

$$\begin{aligned} P_\ell^m(\cos \theta) &= (-1)^m (1 - \cos^2 \theta)^{m/2} \frac{d^m}{d \cos^m \theta} P_\ell(\cos \theta) \\ P_\ell^{-m}(\cos \theta) &= (-1)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_\ell^m(\cos \theta) \\ P_m^m(\cos \theta) &= (-1)^m (2m - 1)!! (1 - \cos^2 \theta)^{m/2} = (-1)^m (2m - 1)!! \sin^m \theta \\ P_{m+1}^m(\cos \theta) &= (2m + 1) \cos \theta P_m^m(\cos \theta) \\ P_\ell^m(-\cos \theta) &= (-1)^{\ell+m} P_\ell^m(\cos \theta) \end{aligned}$$

Relation de récurrence :

$$P_\ell^m = \frac{2\ell - 1}{\ell - m} \cos \theta P_{\ell-1}^m - \frac{\ell + m - 1}{\ell - m} P_{\ell-2}^m$$

Définition des λ_ℓ^m :

$$\begin{aligned} \lambda_\ell^m &= \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_\ell^m \\ \lambda_\ell^{-m} &= (-1)^m \lambda_\ell^m \\ \lambda_\ell^m(-\cos \theta) &= (-1)^{\ell+m} \lambda_\ell^m(\cos \theta) \end{aligned}$$

Relation de récurrence :

$$\lambda_\ell^m = \sqrt{\frac{4\ell^2 - 1}{\ell^2 - m^2}} \left(\cos \theta \lambda_{\ell-1}^m - \sqrt{\frac{(\ell + m - 1)(\ell - m - 1)}{(2\ell - 3)(2\ell - 1)}} \lambda_{\ell-2}^m \right)$$

Harmoniques sphériques Y_ℓ^m et $_{\pm 2}Y_\ell^m$

Harmoniques sphériques scalaires :

$$\begin{aligned} Y_\ell^m(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi} \\ &= \lambda_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi} \end{aligned}$$

Harmoniques sphériques tensorielles et propriétés :

$$\begin{aligned} {}_sY_\ell^m(\theta, \phi) &= (-1)^{\ell-m} \sqrt{\frac{(\ell+m)! (\ell-m)! (2\ell+1)}{(\ell+s)! (\ell-s)! 4\pi}} \sin^{2\ell} \frac{\theta}{2} \\ &\quad \times \sum_r C_r^{\ell-s} C_{r+s-m}^{\ell+s} \frac{(-1)^{r+s-m}}{\tan^{2r+s-m} \frac{\theta}{2}} e^{im\phi} \end{aligned}$$

$$\text{avec } C_n^p = \frac{n!}{p! (n-p)!}$$

$${}_sY_\ell^{m*} = (-1)^{s+m} {}_{-s}Y_\ell^m$$

$$\sum_{\ell, m} {}_sY_\ell^{m*}(\theta, \phi) {}_sY_\ell^m(\theta', \phi') = \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta')$$

$$\int \sin \theta d\theta d\phi {}_sY_\ell^m(\theta, \phi) {}_sY_{\ell'}^{m'*}(\theta, \phi) = \delta_{\ell, \ell'} \delta_{m, m'}$$

Opérateurs de dérivation pour les ${}_sY_\ell^m$:

$$\begin{aligned} \bar{\partial} &= -\sin^s \theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \frac{1}{\sin^s \theta} \\ \bar{\partial} &= -\frac{1}{\sin^s \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \sin^s \theta \\ \bar{\partial} \bar{\partial} - \bar{\partial} \bar{\partial} &= 2s \mathbb{1} \\ \bar{\partial}_s Y_\ell^m &= \sqrt{(\ell-s)(\ell+s+1)} {}_{s+1}Y_\ell^m \\ \bar{\partial}_s Y_\ell^m &= -\sqrt{(\ell+s)(\ell-s+1)} {}_{s-1}Y_\ell^m \\ \bar{\partial} \bar{\partial}_s Y_\ell^m &= -(\ell-s)(\ell+s+1) {}_sY_\ell^m \end{aligned}$$

Expression des ${}_sY_\ell^m$ en fonction des Y_ℓ^m :

$$\begin{aligned} {}_sY_\ell^m(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{(\ell-s)!}{(\ell+s)!}} \bar{\partial}^s Y_\ell^m(\theta, \phi), \text{ si } 0 \leq s \leq \ell \\ &= \sqrt{\frac{(\ell+s)!}{(\ell-s)!}} (-1)^s \bar{\partial}^{-s} Y_\ell^m(\theta, \phi), \text{ si } -\ell \leq s \leq 0 \end{aligned}$$

Application au calcul des spectres de puissance

On donne les formules de récurrence entre les harmoniques sphériques de spin-2, utiles lors du calcul des spectres de puissance d'un champ de spin-2 sur la sphère. On donne également les liens entre les notations de Zaldarriaga (1998) et de Kamionkowski et al. (1997).

Concernant la décomposition des champs réels sur les Y_ℓ^m , on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}) &= \sum_{\ell m} a_{\ell m}^T Y_\ell^m(\hat{\mathbf{n}}) \\ E(\hat{\mathbf{n}}) &= \sum_{\ell m} a_{\ell m}^E Y_\ell^m(\hat{\mathbf{n}}) \\ B(\hat{\mathbf{n}}) &= \sum_{\ell m} a_{\ell m}^B Y_\ell^m(\hat{\mathbf{n}}) \\ \text{avec } a_{\ell m}^E &= -\frac{a_{2\ell m} + a_{-2\ell m}}{2} \quad \text{et} \quad a_{\ell m}^B = i \frac{a_{2\ell m} - a_{-2\ell m}}{2}.\end{aligned}$$

Les spectres de puissance sont définis par :

$$\begin{aligned}C_\ell^T &= \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=0}^{+\infty} |a_{\ell m}^T|^2 = \langle |a_{\ell m}^T|^2 \rangle \\ C_\ell^E &= \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=0}^{+\infty} |a_{\ell m}^E|^2 = \langle |a_{\ell m}^E|^2 \rangle \\ C_\ell^B &= \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=0}^{+\infty} |a_{\ell m}^B|^2 = \langle |a_{\ell m}^B|^2 \rangle.\end{aligned}$$

Les champs décomposés sur les harmoniques sphériques sont réels, ce qui implique :

$$\begin{aligned}a_{\ell m}^{X*} &= (-1)^m a_{\ell -m}^X \quad \text{avec } X \in \{T, E, B\} \\ &\text{et} \\ a_{\pm 2\ell m}^* &= (-1)^m a_{\mp 2\ell -m}.\end{aligned}$$

Il existe des fonctions $W_{\ell m}$ et $X_{\ell m}$ (introduites par kamionkowski) telles que, pour les paramètres de Stokes :

$$\begin{aligned}Q &= T_0 \sum_{\ell m} N_\ell (a_{\ell m}^G W_{\ell m} - a_{\ell m}^C X_{\ell m}) \\ U &= -T_0 \sum_{\ell m} N_\ell (a_{\ell m}^G X_{\ell m} + a_{\ell m}^C W_{\ell m}) \quad \text{avec} \quad N_\ell = \sqrt{\frac{2(\ell-2)!}{(\ell+2)!}}.\end{aligned}$$

Les indices G et C sur les coefficients du développement signifient Gradient et Curl (rotationnel). Nous allons montrer que G est lié au champ de polarisation E (par analogie avec le champ électrique qui est le Gradient d'un potentiel scalaire, donc un vrai vecteur) et C est lié au champ B (par analogie avec le champ magnétique qui peut s'écrire comme le rotationnel d'un potentiel vecteur, c'est donc un pseudo-vecteur). On peut aussi utiliser d'autres fonctions, les harmoniques sphériques de spin-2, bien adaptées à décrire les combinaisons $Q \pm iU$, qui sont de spin-2 :

$$Q \pm iU = \sum_{\ell m} a_{\pm 2\ell m} \pm 2 Y_\ell^m ;$$

en reprenant les dernières relations en fonction des $W_{\ell m}$ et $X_{\ell m}$, on obtient :

$$\begin{aligned} Q + iU &= T_0 \sum_{\ell m} N_{\ell} \left((a_{\ell m}^G - i a_{\ell m}^C) W_{\ell m} - (a_{\ell m}^C + i a_{\ell m}^G) X_{\ell m} \right) \\ Q - iU &= T_0 \sum_{\ell m} N_{\ell} \left((a_{\ell m}^G + i a_{\ell m}^C) W_{\ell m} - (a_{\ell m}^C - i a_{\ell m}^G) X_{\ell m} \right). \end{aligned}$$

On identifie pour obtenir :

$$\begin{aligned} {}_{\pm 2}Y_{\ell}^m &= -\sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}} (W_{\ell m} \mp i X_{\ell m}) \\ W_{\ell m} &= -\sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} \left(\frac{{}_2Y_{\ell}^m + {}_{-2}Y_{\ell}^m}{2} \right) \\ X_{\ell m} &= -i\sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} \left(\frac{{}_2Y_{\ell}^m - {}_{-2}Y_{\ell}^m}{2} \right) \end{aligned}$$

pour les fonctions de base et :

$$\begin{aligned} a_{\pm 2\ell m} &= -T_0\sqrt{2} (a_{\ell m}^G \mp i a_{\ell m}^C) \\ a_{\ell m}^E &= T_0\sqrt{2} a_{\ell m}^G \\ a_{\ell m}^B &= -T_0\sqrt{2} a_{\ell m}^C \end{aligned}$$

pour les coefficients des développements. On retrouve bien le fait que G est lié au champ E et que C est lié au champ B .

Pour ce qui est des expressions analytiques des $X_{\ell m}$, $W_{\ell m}$, ${}_2Y_{\ell}^m$ et ${}_{-2}Y_{\ell}^m$, on introduit d'abord deux fonctions $G_{\ell m}^+$ et $G_{\ell m}^-$ définies par :

$$\begin{aligned} G_{\ell m}^+ &= -\left(\frac{\ell-m^2}{\sin^2 \theta} + \frac{\ell(\ell-1)}{2} \right) P_{\ell}^m + (\ell+m) \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} P_{\ell-1}^m \\ G_{\ell m}^- &= \frac{m}{\sin^2 \theta} ((\ell-1) \cos \theta P_{\ell}^m - (\ell+m) P_{\ell-1}^m). \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} W_{\ell m} &= -2\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} G_{\ell m}^+ e^{im\phi} \\ iX_{\ell m} &= -2\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} G_{\ell m}^- e^{im\phi} \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'en déduire :

$$\begin{aligned} {}_2Y_{\ell}^m &= 2\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} (G_{\ell m}^+ - G_{\ell m}^-) e^{im\phi} \\ {}_{-2}Y_{\ell}^m &= 2\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} (G_{\ell m}^+ + G_{\ell m}^-) e^{im\phi} \quad \text{ou encore,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_2Y_\ell^m &= 2\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \\
&\quad \times \left(-\left(\frac{\ell-m^2}{\sin^2 \theta} + \frac{\ell(\ell-1)}{2} + \frac{m(\ell-1)\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) P_\ell^m \right. \\
&\quad \left. + (\ell+m) \frac{\cos \theta + m}{\sin^2 \theta} P_{\ell-1}^m \right) e^{im\phi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_{-2}Y_\ell^m &= 2\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \\
&\quad \times \left(-\left(\frac{\ell-m^2}{\sin^2 \theta} + \frac{\ell(\ell-1)}{2} - \frac{m(\ell-1)\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) P_\ell^m \right. \\
&\quad \left. + (\ell+m) \frac{\cos \theta - m}{\sin^2 \theta} P_{\ell-1}^m \right) e^{im\phi}
\end{aligned}$$

ou encore, en fonction des λ_ℓ^m :

$$\begin{aligned}
{}_2Y_\ell^m &= 2\sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}} \left(-\left(\frac{\ell-m^2}{\sin^2 \theta} + \frac{\ell(\ell-1)}{2} + \frac{m(\ell-1)\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \lambda_\ell^m \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{2\ell+1}{2\ell-1}} \sqrt{\frac{\ell-m}{\ell+m}} \frac{(\ell+m)(\cos \theta + m)}{\sin^2 \theta} \lambda_{\ell-1}^m \right) e^{im\phi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_{-2}Y_\ell^m &= 2\sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}} \left(-\left(\frac{\ell-m^2}{\sin^2 \theta} + \frac{\ell(\ell-1)}{2} - \frac{m(\ell-1)\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \lambda_\ell^m \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{2\ell+1}{2\ell-1}} \sqrt{\frac{\ell-m}{\ell+m}} \frac{(\ell+m)(\cos \theta - m)}{\sin^2 \theta} \lambda_{\ell-1}^m \right) e^{im\phi}
\end{aligned}$$

Cas particuliers où $\ell = m$ ¹ :

$$W_{\ell m} = - \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) Y_{\ell}^m \quad (\text{A.1})$$

$$X_{\ell m} = \frac{2im}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) Y_{\ell}^m$$

$$\text{soit, pour } \ell = m, \quad W_{mm} = -m(m-1) \left(\frac{2}{\sin^2 \theta} - 1 \right) \sqrt{\frac{2m+1}{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{(2m)!}} P_m^m e^{im\phi}$$

$$X_{mm} = 2im \sqrt{\frac{2m+1}{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{(2m)!}} \frac{(m-1) \cos \theta}{\sin^2 \theta} P_m^m e^{im\phi}$$

$$\text{ou encore, en fonction des } \lambda_m^m, \quad W_{mm} = -m(m-1) \left(\frac{2}{\sin^2 \theta} - 1 \right) \lambda_m^m e^{im\phi}$$

$$X_{mm} = 2i \frac{m(m-1) \cos \theta}{\sin^2 \theta} \lambda_m^m e^{im\phi}$$

Ce qui donne pour les ${}_{\pm 2}Y_m^m$:

$${}_2Y_m^m = \sqrt{\frac{(m-1)m}{(m+1)(m+2)}} \left(\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \theta} - 1 \right) \lambda_m^m e^{im\phi}$$

$${}_{-2}Y_m^m = \sqrt{\frac{(m-1)m}{(m+1)(m+2)}} \left(\frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \theta} - 1 \right) \lambda_m^m e^{im\phi}.$$

Si on note ${}_{\pm 2}\lambda_{\ell}^m(\cos \theta)$ les dépendances en θ des ${}_{\pm 2}Y_{\ell}^m$, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} {}_{\pm 2}\lambda_{\ell}^m(\pm \cos \theta) &= (-1)^{\ell+m} {}_{\mp 2}\lambda_{\ell}^m(\pm \cos \theta) \\ {}_{\pm 2}\lambda_{\ell}^{-m}(\pm \cos \theta) &= (-1)^m {}_{\mp 2}\lambda_{\ell}^m(\pm \cos \theta). \end{aligned}$$

¹ Pour l'Eq. A.1, la première forme donnée dans Kamionkowski et al. (1997) page 5 (Eq. 2.22) et définissant $W_{\ell m}$ est fautive, il faut rajouter un signe “-”. La seconde forme est également erronée.

B. DESTRIAGE DE LA TEMPÉRATURE

Nous donnons ici les formules pour le cas du destriage de données de température avec des bolomètres. Les hypothèses sont les mêmes que dans le cas polarisé et nous utilisons les mêmes notations pour désigner des quantités communes. À la place des polarimètres, nous avons h bolomètres. La mesure de ces bolomètres ne dépend pas de leur orientation ; le modèle de la mesure s'écrit donc :

$$\mathbf{M}_{i,j,\delta} = I_{i,j,\delta} \mathbf{u} + \sum_{\ell=1}^{n_{\text{fit}}} \mathbf{a}_i^\ell f_i^\ell(\phi_{i,j,\delta}),$$

où $I_{i,j,\delta}$ est un *scalaire*, c'est la température du ciel dans la direction du point $\{i, j, \delta\}$. \mathbf{u} est le h -vecteur :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

et correspond à la matrice \mathcal{A} du cas polarisé. \mathbf{a}_i^ℓ sont les amplitudes à ajuster et les f_i^ℓ sont les fonctions servant à modéliser le bruit. Le destriage d'une constante correspond à $n_{\text{fit}} = 1$ et $f_i^\ell = 1$. Le χ^2 est donné par :

$$\chi^2 = \sum_{i,j \in \mathcal{I}(i), \delta = \pm 1} \left(\mathbf{M}_{i,j,\delta} - I_{i,j,\delta} \mathbf{u} - \sum_{\ell=1}^{n_{\text{fit}}} \mathbf{a}_i^\ell f_i^\ell(\phi_{i,j,\delta}) \right)^T \times \mathbf{N}_i^{-1} \left(\mathbf{M}_{i,j,\delta} - I_{i,j,\delta} \mathbf{u} - \sum_{\ell=1}^{n_{\text{fit}}} \mathbf{a}_i^\ell f_i^\ell(\phi_{i,j,\delta}) \right). \quad (\text{B.1})$$

Nous utilisons le fait que la température du ciel dans la direction $\{i, j, \delta\}$ est la même que celle dans la direction $\{j, i, -\delta\}$, puisque ces deux points sont les mêmes et que la mesure de la température ne dépend pas de l'orientation. La contrainte s'écrit :

$$I_{i,j,\delta} = I_{j,i,-\delta}.$$

Ce qui nous mène au système linéaire suivant :

$$\sum_{j \in \mathcal{I}(i), \delta = \pm 1} \frac{f_i^\ell(\phi_{i,j,\delta})}{x_i + x_j} \sum_{\ell'=1}^{n_{\text{fit}}} \left(\tilde{\mathbf{a}}_i^{\ell'} f_i^{\ell'}(\phi_{i,j,\delta}) - \tilde{\mathbf{a}}_j^{\ell'} f_j^{\ell'}(\phi_{j,i,-\delta}) \right) = \sum_{j \in \mathcal{I}(i), \delta = \pm 1} f_i^\ell(\phi_{i,j,\delta}) \frac{\mathcal{J}_{i,j,\delta} - \mathcal{J}_{j,i,-\delta}}{x_i + x_j},$$

où nous avons introduit, comme dans le cas polarisé des variables réduites définies par :

$$\begin{aligned}x_i &= \mathbf{u}^T \mathbf{N}_i^{-1} \mathbf{u} \\ \mathcal{J}_{i,j,\delta} &= \frac{1}{x_i} \mathbf{u}^T \mathbf{N}_i^{-1} \mathbf{M}_{i,j,\delta} \\ \tilde{\mathbf{a}}_i^\ell &= \frac{1}{x_i} \mathbf{u}^T \mathbf{N}_i^{-1} \mathbf{a}_i^\ell.\end{aligned}$$

Le cas particulier du destriage de constante fait apparaître une dégénérescence car les n amplitudes à ajuster n'interviennent qu'à travers leurs différences. Il suffit de fixer l'une de ces constantes par exemple pour pouvoir résoudre le système. Dans le cas général, la matrice à inverser a pour dimensions $n \times n$. Si l'on n'a qu'un seul bolomètre, il suffit de remplacer x_i par σ_i^2 où sigma est l'erreur du bolomètre sur les mesures le long du cercle i .

C. APPROXIMATION DE L'ATMOSPHÈRE PLANE

L'approximation de l'atmosphère plane consiste à dire que l'observation se fait suffisamment proche du zénith pour pouvoir approximer l'(atmo-)sphère par son plan tangent. L'épaisseur d'atmosphère traversée par un rayon incident dans une direction \hat{n} dépend de cette direction. Elle est minimale quand on regarde vers le zénith. Si θ est l'angle entre \hat{n} et le zénith ($0 \leq \theta \leq 90^\circ$) alors l'épaisseur exacte (atmosphère courbe) traversée est donnée par :

$$e_C(\theta) = \sqrt{R^2 \cos^2 \theta + h^2 + 2Rh} - R \cos \theta, \quad (\text{C.1})$$

où R est le rayon de la Terre (~ 6400 km) et h l'épaisseur de l'atmosphère au zénith (~ 40 km). D'autre part, dans l'approximation de l'atmosphère plane, l'épaisseur traversée est :

$$e_P(\theta) = \frac{h}{\cos \theta}. \quad (\text{C.2})$$

Un développement limité de e_C valable pour un très large intervalle de valeurs de θ s'écrit :

$$e_C(\theta) = \frac{h}{\cos \theta} \left(1 - \frac{h}{2R} \tan^2 \theta + \frac{h^2}{2R^2 \cos^2 \theta} \tan^2 \theta + \dots \right)$$

valable pour $\theta \leq 83^\circ$.

L'erreur relative commise en considérant que l'atmosphère est plane est donc, au premier ordre :

$$\varepsilon = \left| \frac{e_C - e_P}{e_P} \right| = \frac{h}{2R} \tan^2 \theta \quad \text{pour } \theta \leq 83^\circ$$

et est de l'ordre de 0.04 % au maximum dans le cas de COSMOSOMAS puisque l'on est au pire à 19° du zénith.

La Fig. C.1 montre l'erreur relative commise en fonction de l'élévation à laquelle on observe ($|e_C - e_P|/e_P = f(\theta)$).

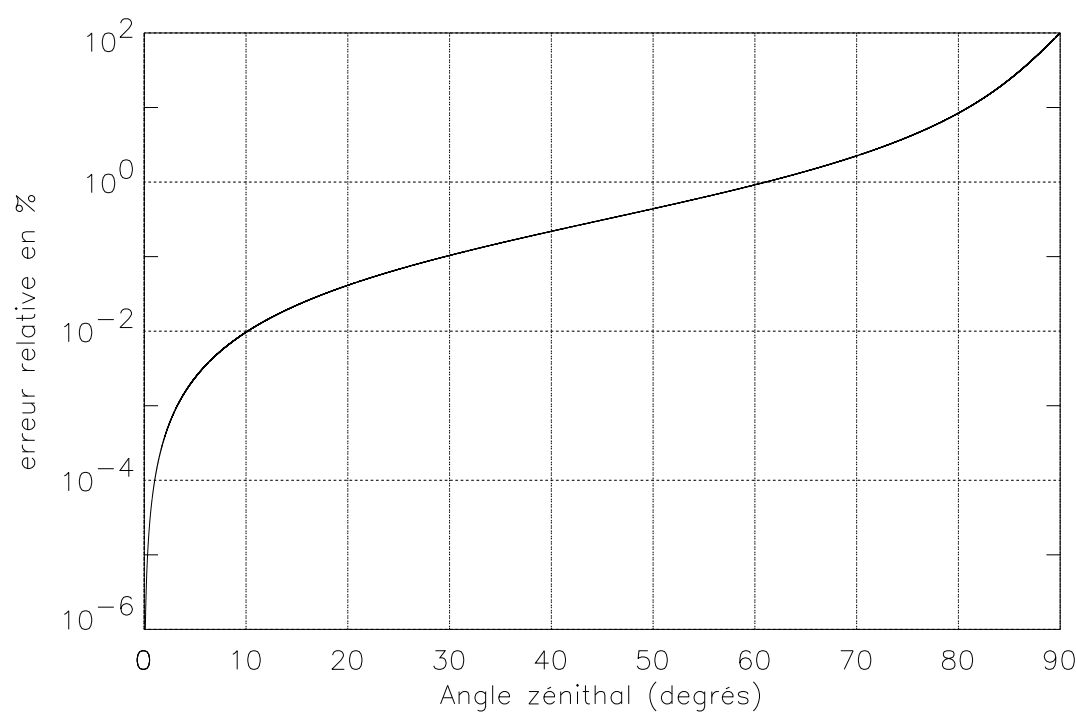


Fig. C.1: Erreur relative entre l'atmosphère exacte et l'approximation de l'atmosphère plane. L'angle zénithal est l'angle séparant la direction incidente et le zénith (angle noté θ dans les Eqs. C.1 et C.2).

D. POSITION MOYENNE DE LA GALAXIE EN COORDONNÉES ÉQUATORIALES

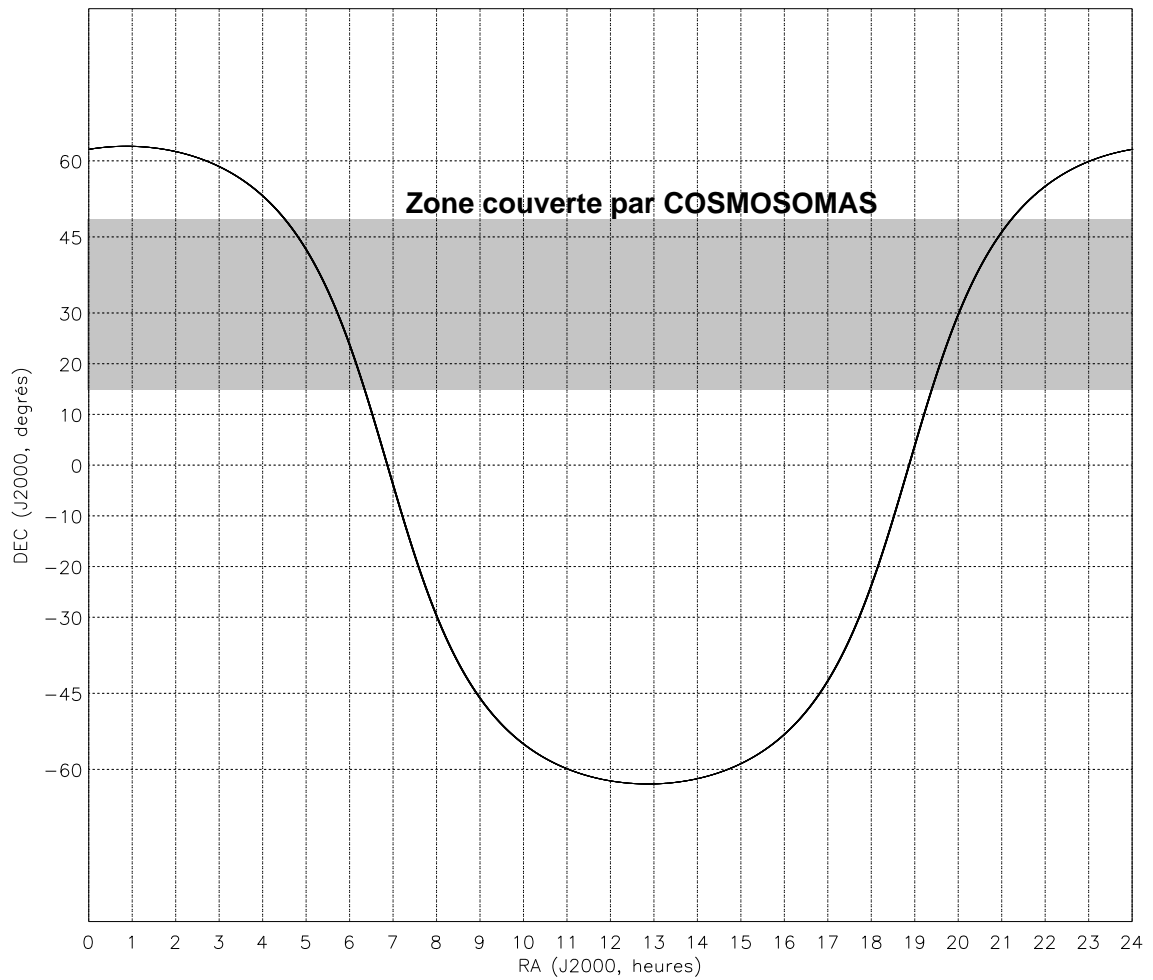


Fig. D.1: Position moyenne de la Voie Lactée en coordonnées équatoriales. On a représenté en surimpression la portion de ciel couverte par COSMOSOMAS (entre les déclinaisons 15° et 47°).

BIBLIOGRAPHIE

- Afonso, C. et al. : 1999, Microlensing Towards the Small Magellanic Cloud EROS2 two-year analysis, *Astron. Astrophys.* **344**, L63
- Aguirre, A. : 1999, Intergalactic Dust and Observations of Type Ia Supernovæ, *Astrophys. J.*, in press ; astro-ph/9904319
- Alcock, C. et al. : 1997, The MACHO Project Large Magellanic Cloud Microlensing Results from the First Two Years and the Nature of the Galactic Dark Halo, *Astrophys. J.* **486**, 697
- Alcock, C. et al. : 1998, EROS and MACHO Combined Limits on Planetary-Mass Dark Matter in the Galactic Halo, *Astrophys. J.* **499**, 9
- Alpher, R., Bethe, H., et Gamow, G. : 1948, The Origin of Chemical Elements, *Phys. Rev. Lett.* **73**(7), 803
- Alpher, R. et Herman, R. : 1948, Evolution of the Universe, *Nature* **162**, 774
- Applegate, J., Hogan, C., et Scherrer, R. : 1987, Cosmological baryon diffusion and nucleosynthesis, *Phys. Rev. D* **35**, 1151
- Baars, J., Genzel, R., Pauliny-Toth, I., et A., W. : 1977, The Absolute Spectrum of Cas A ; An Accurate Flux Density Scale and a Set of Secondary Calibrators, *Astron. Astrophys.* **61**, 99
- Bardeen, J., Bond, J., Kaiser, N., et Szalay, A. : 1986, The Statistics of Peaks of Gaussian Random Fields, *Astrophys. J.* **304**, 15
- Bartlett, J. : 1999, The Standard Cosmological Model and CMB Anisotropies, astro-ph/9903260
- Begeman, K. G., Broeils, A. H., et Sanders, R. H. : 1991, Extended rotation curves of spiral galaxies - Dark haloes and modified dynamics, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **249**, 523
- Binétruy, P., Deffayet, C., et Langlois, D. : 1999, Non-conventional cosmology from a brane-universe, hep-th/9905012
- Borrill, J. : 1999, MADCAP — The Microwave Anisotropy Dataset Computational Analysis Package, astro-ph/9911389
- Burles, S., Nollett, K., Truran, J., et Turner, M. : 1999, Sharpening the Predictions of Big-Bang Nucleosynthesis, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4176, astro-ph/9901157
- Carlberg, R. G., Yee, H. K. C., Ellingson, E., Abraham, R., Gravel, P., Morris, S., et Pritchet, C. J. : 1996, Galaxy Cluster Virial Masses and Omega, *Astrophys. J.* **462**, 32, astro-ph/9509034
- Chandrasekhar, S. : 1960, *Radiative Transfer*, Dover
- Cortiglioni, S. et Spoelstra, T. : 1995, The limitations of cosmic microwave background measurements due to linear polarization of galactic radio emission, *Astron. Astrophys.* **(302)**, 1
- Couchot, F., Delabrouille, J., Kaplan, J., et Revenu, B. : 1999, Optimised polarimeter configurations for measuring the Stokes parameters of the Cosmic Microwave Background Radiation, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **135**, 579, astro-ph/9807080

- Crittenden, R., Bond, J. R., Davis, R. L., Efstathiou, G., et Steinhardt, P. J. : 1993a, Imprint of gravitational waves on the cosmic microwave background, *Phys. Rev. Lett.* **71**(3), 324, [astro-ph/9303014](#)
- Crittenden, R., Davis, R., et Steinhardt, P. : 1993b, Polarization of the Microwave Background due to Primordial Gravitational Waves, *Astrophys. J.* **417**, 13
- Davis, R. L., Hodges, H. M., Smoot, G. F., Steinhardt, P. J., et Turner, M. S. : 1992, Cosmic microwave background probes models of inflation, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1856, [astro-ph/9207001](#)
- de Bernardis, P. et al. : 1999, Mapping the CMB Sky : The BOOMERANG experiment, *New Astronomy Reviews* **43**, 289, [astro-ph/9911461](#)
- Delabrouille, J. : 1998, Analysis of the accuracy of a destriping method for future cosmic microwave background mapping with the PLANCK SURVEYOR satellite, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **127**, 555
- Dicke, R., Peebles, P., Roll, P., et Wilkinson, D. : 1965, Cosmic Blackbody Radiation, *Astrophys. J., Lett.* **142**, 383
- Durrer, R. : 2000, Cosmological Structure Formation with Topological Defects, [astro-ph/0003363](#)
- Easson, D. : 2000, The Interface of Cosmology with String and M(illenium) Theory, [hep-th/0003086](#)
- Fixsen, D., Cheng, E., Gales, J., Mather, J., Schafer, R., et Wright, E. : 1996, The Cosmic Microwave Background Spectrum from the full COBE FIRAS Data Set, *Astrophys. J.* **473**, 576, [astro-ph/9605054](#)
- Fukuda, Y. et al. : 1998, Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1562
- Gamow, G. : 1946, Expanding Universe and the Origin of Elements, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 572
- Gamow, G. : 1948, The Evolution of the Universe, *Nature* **162**, 680
- Gaztañaga, E. et Baugh, C. : 1998, Testing Deprojection Algorithms on Mock Angular Catalogues : Evidence for a Break in the Power Spectrum, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **294**, 229
- Górski et al. : 1999, The HEALPix Primer, [astro-ph/9905275](#)
- Griest, K. : 1991, Galactic Microlensing as a Method of Detecting Massive Compact Halo, *Astrophys. J.* **366**, 412
- Griffiths, L., Barbosa, D., et Liddle, A. : 1998, Cosmic Microwave Background Constraints on the Epoch of Reionization, [astro-ph/9812125](#)
- Grishchuk, L. P. et Martin, J. : 1997, Best Unbiased Estimates for the Microwave Background Anisotropies, *Phys. Rev. D* **D(56)**, 1924, [gr-qc/9701024](#)
- Gunn, J. et Peterson, B. : 1965, On the Density of Neutral Hydrogen in Intergalactic Space, *Astrophys. J.* **142**(1633)
- Gurvits, L., Kellermann, K., et Frey, S. : 1998, The “angular size - redshift” relation for compact radio structures in quasars and radio galaxies, *Accepted for publication in Astron. Astrophys.*, [astro-ph/9812018](#)
- Guth, A. : 1981, Inflationary Universe : A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems, *Phys. Rev. D* **23**(2), 347
- Haiman, Z. et Knox, L. : 1999, Reionization of the Intergalactic Medium and its Effect on the cMB, [astro-ph/9902311](#)
- Hamuy, M. et al. : 1996, The Hubble Diagram of the Calan/Tololo Type Ia Supernovae and the Value of H_0 , *Astron. J.* **112**, 2398
- Harari, D. et Zaldarriaga, M. : 1993, *Phys. Rev. B* **319**, 96

- Haslam, C., Salter, C., Stoffel, H., et Wilson, W. : 1982, A 408 MHz All-Sky Continuum Survey. II. The Atlas of Contour Maps, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **47**, 1
- Hogan, C. : 1997, in N. Turok (ed.), *Critical Dialogues in Cosmology*, World Scientific, astro-ph/9609138
- Hu, W. : 1995, *Wandering in the Background : A CMB Explorer*, Ph.D. thesis, UC Berkeley
- Hubble, E. : 1929, A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-galactic Nebulae, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **15**, 168
- Jungman, G., Kamionkowski, M., et Griest, K. : 1996, Supersymmetric Dark Matter, *Phys. Rep.* **267**, 195, hep-ph/9506380
- Kamionkowski, M., Kosowsky, A., et Stebbins, A. : 1997, Statistics of Cosmic Microwave Background Polarization, *Phys. Rev. D* **55**, 7368, astro-ph/9611125
- Kiefer, K., Lesgourgues, J., Polarski, D., et Starobinsky, A. : 1998, The Coherence of Primordial Fluctuations Produced During Inflation, *Classical Quantum Gravity* **15**, L67, gr-qc/9806066
- Kinney, W. : 1998, Constraining Inflation with Cosmic Microwave Background Polarization, *Phys. Rev. D* **58**, 123506, astro-ph/9806259
- Knox, L. : 1995, Determination of inflationary observables by cosmic microwave background anisotropy experiments, *Phys. Rev. D* **52**(8), 4307, astro-ph/9504054
- Knox, L. et Turner, M. : 1994, Detectability of tensor perturbations through anisotropy of the cosmic background radiation, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3347, astro-ph/9407037
- Kolb, E. et Turner, M. : 1990, *The Early Universe*, Addison Wesley
- Kosowsky, A. : 1996, Cosmic Microwave Background Polarization, *Ann. Phys.* **246**, 49
- Lineweaver, C. : 1997, Gold in the Doppler Hills : Cosmological Parameters in the Microwave Background, astro-ph/9702042
- Lyth, D. et Riotto, A. : 1999, Particle Physics Models of Inflation and the Cosmological Density Perturbation, *Phys. Rep.* **314**, 1
- Ma, C.-P., Small, T., et Sargent, W. : 1998, Weighing Superclusters, astro-ph/9808034
- Madore, B. et al. : 1999, The HST KEY PROJECT on the extragalactic distance scale. XV. A Cepheid Distance to the Fornax Cluster, *Astrophys. J.*, in press. astro-ph/9812157
- Mannheim, P. : 1993, Linear Potentials and Galactic Rotation Curves, *Astrophys. J.* **419**, 150
- Mather, J. et al. : 1994, Measurement of the Cosmic Background Spectrum by the COBE FIRAS Instrument, *Astrophys. J.* **420**, 439
- Mauskopf, P. et al. : 1999, Measurement of a Peak in the Cosmic Microwave Background Power Spectrum from the North American test flight of BOOMERANG, astro-ph/9911444
- Misner, C., Thorne, K., et Wheeler, J. : 1973, *Gravitation*, Freeman
- Nayeri, A., Engineer, S., Narlikar, J., et Hoyle, F. : 1999, Structure Formation in the Quasi-Steady State Cosmology : a Toy Model, to appear in *Astrophys. J.*, <http://weblib.cern.ch/Home/index.php>
- Olive, K. : 1999, Primordial Big-Bang Nucleosynthesis, astro-ph/9901231
- Olive, K., Steigman, G., et Walker, T. : 1999, Primordial Nucleosynthesis : Theory and Observations, astro-ph/9905320
- Oort, J. : 1940, Some Problems Concerning the Structure and Dynamics of the Galactic System and the Elliptical Nebulae NGC 3115 and 4494, *Astrophys. J.* **91**(3), 273
- Ostriker, J., Peebles, P., et Yahil, A. : 1974, The Size and Mass of Galaxies and the Mass of the Universe, *Astrophys. J.* **193**, 1

- Paczynski, B. : 1986, Gravitational Microlensing by the Galactic Halo, *Astrophys. J.* **304**, 1
- Padmanabhan, T. : 1993, *Structure Formation in the Universe*, Cambridge University Press
- Peebles, P. : 1980, *The Large Scale Structure of the Universe*, Princeton University Press
- Peebles, P. : 1993, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press
- Penzias, A. et Wilson, R. : 1965, A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s, *Astrophys. J., Lett.* **142**, 419
- Perlmutter, S. et al. : 1999, Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae, *Astrophys. J.* **517**, 565
- Puget, J. et al. : 1996, Tentative Detection of a Cosmic Far-Infrared Background, *Astron. Astrophys.* **308**, 5
- Rajagopal, K., Turner, M., et Wilczek, F. : 1991, Cosmological Implications of Axinos, *Nucl. Phys.* **B358**, 447
- Revenu, B. : 1998, 600 000 ans après le *Big-Bang* : comment la gravitation a pris le pas, *Science & Vie* (**205**), 100, Hors-Série
- Revenu, B., Kim, A., Ansari, R., Couchot, F., Delabrouille, J., et Kaplan, J. : 2000, Destriping of Polarized Data in a CMB Mission with a Circular Scanning Strategy, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **142**, 499, [astro-ph/9905163](#)
- Riess, A. et al. : 1998, Observationnal Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant, *Astron. J.* **116**, 1009 :1038
- Riess, A., Filippenko, A., Li, W., et Schmidt, B. : 1999, An Indication of Evolution of Type Ia Supernovae from their Risetimes, [astro-ph/9907038](#)
- Sachs, R. et Wolfe, A. : 1967, Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background, *Astrophys. J.* **147**, 73
- Sarkar, S. : 1996, *Rep. Prog. Phys.* **59**, 1493
- Smoot, G. : 1994, *Wrinkles in time*, William Morrow and Co
- Smoot, G. : 1999, CMB Synchrotron Foreground, [astro-ph/9902201](#)
- Smoot, G. et al. : 1992, Structure in the COBE Differential Microwave Radiometer First-Year Maps, *Astrophys. J., Lett.* **396**, L1
- Stewart, E. et Lyth, D. : 1993, A More Accurate Analytic Calculation of the Spectrum of Cosmological Perturbations Produced During Inflation, *Phys. Lett. B* **302**, 171, [gr-qc/9302019](#)
- Tegmark, M. : 1999, Cosmological constraints from current CMB and SN 1a data : a brute force 8 parameter analysis, *Astrophys. J., Lett.* **514**, 69, [astro-ph/9809201](#)
- Tegmark, M., Hamilton, A., Strauss, M., Vogeley, M., et Szalay, A. : 1998, Measuring the galaxy power spectrum with future redshift surveys, *Astrophys. J.* 499, [astro-ph/9708020](#)
- Valentijn, E. et van der Werf, P. : 1999, First Extragalactic Direct Detection of Large-Scale Molecular Hydrogen in the Disk of NGC 891, *Astrophys. J.* **522**, L29
- Weinberg, S. : 1972, *Gravitation and Cosmology*, Wiley
- White, M. et Srednicki, M. : 1994, Window Functions for CMB Experiments, *Astrophys. J.* **443**, 6, [astro-ph/9402037](#)
- White, S., Frenk, C., et Davis, M. : 1983, Clustering in a Neutrino-Dominated Universe, *Astrophys. J.* **274**, 1
- Wright, E. L. : 1996, Scanning and Mapping Strategies for CMB Experiments, [astro-ph/9612006](#)
- Wright, E. L., Hinshaw, G., et Bennett, C. L. : 1996, Producing Megapixel Cosmic Microwave Background Maps from Differential Radiometer Data, *Astrophys. J., Lett.* **458**,

53, [astro-ph/9510102](#)

Zaldarriaga, M. : 1998, *Fluctuations in the Cosmic Microwave Background*, *Ph.D. thesis*, [astro-ph/9806122](#)

Zwicky, F. : 1933, *Helv. Phys. Acta* **6**, 110

Glossaire

Cosmologie

*Les quantités apparaissant dans le texte
avec l'indice "0" sont considérées à notre époque.*

z	redshift
κ	courbure spatiale de l'univers
a	facteur d'échelle
q	paramètre de décélération
Λ	constante cosmologique
H	constante de Hubble
h	constante de Hubble réduite $h = H/100$
ρ_c	densité critique, $\rho_c(t) = 3H(t)^2/(8\pi G)$
$\Omega_i^?$	$\rho_i^?/\rho_c$
Ω^R	contribution des espèces relativistes
ρ^R	densité d'énergie des espèces relativistes
Ω^{NR}	contribution des espèces non relativistes
ρ^{NR}	densité d'énergie des espèces non relativistes
Ω_m	contribution matière et rayonnement $\Omega_m = \Omega^R + \Omega^{\text{NR}}$
Ω_Λ	contribution de la constante cosmologique
Ω_κ	contribution de la courbure
D_{ang}	distance angulaire
D_L	distance de luminosité
$t_{\text{eq}}, T_{\text{eq}}$ et z_{eq}	époque, température et redshift de l'égalité matière-rayonnement
$t_{\text{rec}}, T_{\text{rec}}$ et z_{rec}	époque, température et redshift de la recombinaison
$t_{\text{dec}}, T_{\text{dec}}$ et z_{dec}	époque, température et redshift du découplage

Recombinaison et nucléosynthèse

n_B	densité de baryons $n_B = n_p + n_H$
n_H	densité d'atomes hydrogène
n_{e^-}	densité électronique
n_p	densité de protons
n_γ	densité de photons
η	n_B/n_γ
x	paramètre d'ionisation $x = n_p/n_B = n_p/(n_p + n_H)$
μ_E	potentiel chimique de l'espèce E
g_E	facteur de dégénérescence de l'espèce E
m_E	masse de l'espèce E
σ_T	section efficace totale de la diffusion Thomson
ℓ_γ	libre parcours moyen des photons

Inflation

V	potentiel de l'inflation
ϕ	champ scalaire responsable de l'inflation (c'est l'inflaton)
ϵ et η	paramètres de roulement lent
N	nombre de "e-folds"
δ_H	amplitude des perturbations scalaires
$P_{\mathcal{R}}$	spectre de puissance des perturbations scalaires
n	indice spectral scalaire
A_G	amplitude des perturbations tensorielles
P_T	spectre de puissance des perturbations tensorielles
n_T	indice spectral tensoriel

Rayonnement fossile

CMB	"Cosmic Microwave Background", rayonnement fossile à 3 K
I , Q , U et V	paramètres de Stokes
$\Delta T/T$	fluctuations de température
E et B	champs de polarisation
C_ℓ^T	spectre de puissance angulaire des fluctuations de température
C_ℓ^E et C_ℓ^B	spectres de puissance angulaire de polarisation
$a_{\ell m}^T$	coefficients du développement de $\Delta T/T$ sur les harmoniques sphériques Y_ℓ^m
$a_{\ell m}^E$ et $a_{\ell m}^B$	coefficients des développements des champs E et B sur les harmoniques sphériques de spin 2 $_{\pm 2}Y_\ell^m$

Configurations optimisées et destriage

\mathbf{N}	matrice de bruit
--------------	------------------

\mathcal{A}	configuration relative des polarimètres
\mathbf{X}	$\mathbf{X} = \mathcal{A}^T \mathcal{A}$
\mathbf{V}^{-1}	matrice de covariance des paramètres de Stokes $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{X}/\sigma^2$
β et γ	perturbations dans la matrice de bruit des polarimètres
\mathcal{B} et \mathcal{G}	perturbations dans la matrice de covariance des paramètres de Stokes
H	fonction de transfert
$S_n(f)$	spectre de bruit
\mathbf{S}	3-vecteur des paramètres de Stokes I , Q et U
i et j	indices de cercles
k	indices d'échantillons le long des cercles
δ	indice spécifiant l'un ou l'autre des points d'intersections entre deux cercles ($\delta = \pm 1$)
\mathbf{R} et $\tilde{\mathbf{R}}$	matrices de rotation
f_i^ℓ	fonctions d'ajustement
\mathbf{a}_i^ℓ	amplitudes des fonctions d'ajustement
$\tilde{\mathbf{a}}_i^\ell$	amplitudes réduites des fonctions d'ajustement

INDEX

A

abondances primordiales 38
 adiabaticité
 de l'expansion de l'univers 33
 ajustement
 de la galaxie 182
 fin voir "fine tuning"
 algorithme du destriage 147
 analyse
 d'une carte de température 105
 de cartes de polarisation 107
 des données de COSMOSOMAS 174
 anisotropies
 du CMB 77
 et paramètres cosmologiques 80
 et échelles angulaires 77
 antenne
 diagramme d' voir lobe
 température d' 186
 atmosphère
 approximation plane 203
 masse d'air 189

B

balayage voir stratégie de balayage
 beam voir lobe
 Big-Bang 28
 et température 36
 et température de l'univers 30
 bolomètre
 principe de base 121
 bolomètre 121
 bruits dans un 122
 "bottom-up" . voir scénario "bottom-up"
 bruit voir bolomètres
 basse fréquence 124
 filtrage voir filtrage du bruit
 principes généraux 121
 résiduel après moyennage 128
 stationnaire 122

C

calibration

 de COSMOSOMAS 184
 cartes
 de CMB 152
 de COSMOSOMAS 182
 de polarisation de la galaxie ... 153
 de résidus pour le destriage 154
 de température de la galaxie ... 152
 du dipôle 153
 causalité 54
 cinématique 28
 CMB 47, 50
 anisotropies de température 51
 dipôle 51
 effet Sachs-Wolfe 77
 et oscillations acoustiques 78
 et paramètres cosmologiques 81
 et échelles angulaires 77, 79
 spectre mesuré par FIRAS 51
 condition d'intersection 142
 configurations optimisées 111
 conservation
 de l'entropie 12
 du nombre baryonique 47
 du tenseur énergie-impulsion 11, 12
 constante voir destriage
 cosmologique 14
 de Hubble 16
 coordonnées comobiles 12
 corps noir 37
 distribution du 29
 température du 30
 corrélation résiduelle sur un cercle . 166
 COSMOSOMAS 171
 analyse des données 174
 calcul de la phase
 avec la galaxie 180
 avec source ponctuelle 179
 calibration 184
 carte du ciel 182
 géométrie 173
 lobe 183
 courbure 66
 de l'espace-temps 10

domination 13
 en relativité générale 10
 et densité d'énergie 12
 et fluctuations de densité 64
 et inflation 54
 spatiale 12
 tenseur 12, 74
 couverture
 de COSMOSOMAS 173
 du ciel 143
 couverture du ciel
 et rapport signal sur bruit 83

D

décalage vers le rouge voir redshift
 découplage 31, 71
 époque 50
 redshift 50
 température 50
 dégénérescence
 entre paramètres cosmologiques . 81
 et destriage 151
 et phase de COSMOSOMAS ... 180
 densité
 critique 18
 d'énergie de la courbure 12
 d'énergie de la matière voir
 paramètres cosmologiques
 d'énergie du vide 12, 215
 perturbations de voir perturbations
 scalaires
 destriage 144
 avec constante 150
 avec moyenne nulle 154
 contraintes aux intersections ... 147
 et configurations optimisées 150
 géométrie du 140
 mesure de la polarisation 146
 principe du 139
 système linéaire 149
 destripping voir destriage
 diagramme
 d'antenne 84
 diamètre angulaire 24
 en fonction du redshift 23
 diffusion Thomson 88
 et polarisation 89
 dipôle 51, 153
 disposition relative des polarimètres 111

distance
 angulaire 22
 luminosité 24
 propre 16
 distribution
 des intersections entre les cercles ...
 143
 des particules et expansion 35
 des photons du CMB 36
 du corps noir 29
 fonctions de 32
 Doppler 17
 et dipôle cosmologique 50
 et redshift 29
 pics 77, 79

E

"e-folds" 63
 égalité matière-rayonnement
 époque 15
 redshift 20
 entropie de l'univers 12, 33
 équation
 d'Einstein 10, 74
 de Friedmann 12
 de Liouville 85
 de Saha 48
 de transfert pour la polarisation . 96
 estimateur de striage résiduel 164
 événement 8, 9
 expansion
 de l'univers adiabatique 33
 et distribution des particules 35
 et température de l'univers .. 33, 35

F

facteur
 d'échelle 12
 de biais 42
 filtrage
 du 50 Hz 175
 du bruit 131
 "fine tuning" 54
 fit voir ajustement
 fluctuations
 de densité voir perturbations de
 densité
 de la métrique voir perturbations de
 la métrique
 quantiques 63

fluide
 newtonien 65
 vorticité 68, voir perturbations
 vectorielles
flux de Cygnus A 186
fonctions fenêtres 82
formation
 des structures 58
 des structures 36, 56
fréquence
 genou 124

G
gain
 variations du 177, 185
gel
 des particules 32
géodésique 9
géométrie
 de COSMOSOMAS 173
 du destriage 140
 et anisotropies du CMB 81
 et relativité 9

H
harmoniques sphériques 195
horizon
 des particules 26
 des événements 26
 problème de l' 54
Hubble
 loi de 16
 rayon de 27

I
inflation 52
 approximation de roulement lent 62
 et champ scalaire 60
 fluctuations gaussiennes 63
 principe 60
instabilité
 gravitationnelle 52
 instrumentale 123
interaction
 électrofaible 38
 et thermalisation 32
 forte 38
 taux 32
intersection
 condition 142

J

jauge
 choix 73
 invariance 9

L

libre parcours moyen 32, 37, 49, 50
lobe 166
 de COSMOSOMAS 183
 et fonctions fenêtres 84
loi
 de Hubble 16
 de transformation des paramètres de
 Stokes 90
luminosité apparente .. voir distance de
 luminosité

M

masse d'air voir atmosphère
matière noire 43
 nature 45
mesure
 de la polarisation 109
 des paramètres cosmologiques ... 20
 modèle pour les polarimètres ... 147
modèle
 de la mesure pour le destriage . 147
 du Big-Bang 28
modélisation du bruit 132
moyennage voir bruit résiduel, voir
 superposition des scans
moyenne nulle voir destriage avec
 moyenne nulle
métrique 11
 perturbations de la 72

N

neutrinos
 fossiles 35
 masse des 46
nucléosynthèse 31, 37

O

observation
 et matière noire 43
offsets voir destriage avec constante
ondes gravitationnelles 75
 et polarisation 94
optimisation
 de la mesure 111

oscillations acoustiques 77
 et pics Doppler 80

P

paramètres
 cosmologiques 18
 et CMB 81
 mesure 20
 de l'inflation 62, 82
 de Stokes 85
 mesure 109
 particules
 et cinématique 28
 et découplage 31
 et température 35
 gel 32
 perturbations
 cosmologiques 64
 de la métrique 72
 quantiques voir fluctuations
 quantiques
 scalaires 67, 72
 et polarisation 92
 tensorielles 61, 63
 et polarisation 94
 vectorielles 68, 72
 phase
 calcul avec COSMOSOMAS ... 215
 photométrie d'ouverture 184
 pics Doppler 79
 contribution adiabatique 80
 Planck
 distribution de Planck du CMB . 36
 temps de 36
 plasma 47
 platitude
 problème 53
 pointage
 matrice de 127
 matrice de 164
 polarimètre
 disposition relative 145
 et configurations optimisées 111
 et paramètres de Stokes 109
 et système de référence 144
 matrice de corrélation 147
 mesure 147
 polarisation
 équation de transfert 96

 de notre galaxie 153
 description quantitative 85
 du CMB 88
 et diffusion Thomson 89
 et quadrupôles 89
 figures de 92
 mesure de la 109
 principe
 cosmologique 7
 d'un bolomètre 121
 du destriage 139
 sur le bruit 121
 thermodynamique 33
 principe cosmologique 7
 élargissement du 41
 problème
 de l'horizon 54
 de la génération des fluctuations 56
 de la platitude 53
 puissance voir spectre de puissance
 spectre sur une sphère 195

Q

qualité du destriage 160, voir
 estimateur de striage résiduel

R

rapport
 $f_{\text{knee}}/f_{\text{spin}}$ 131
 masse sur luminosité 43
 photons, baryons 79
 rayon
 de Hubble 27, 56, 58
 rayonnement
 à 3 K voir CMB
 de fond cosmologique voir CMB
 fossile voir CMB
 synchrotron 153
 recalage de la phase 179
 réchauffement 63
 recombinaison 47
 époque 48
 redshift 48
 température 48
 redshift 16
 réionisation 81
 relativité
 générale 9
 restreinte 8
 résidus

et destriage 154
roulement lent voir inflation

S

Saha

équation de 48

scans

circulaires 127

superposition de 127

scénario

”bottom-up” 36

du Big-Bang 28

”top-down” 46

section efficace

et taux de réaction 32

sensibilité

de COSMOSOMAS 189

directionnelle 166

soustraction du bruit voir destriage

spectre de puissance

angulaire 79, 103

de la distribution des galaxies 42, 43

des fluctuations scalaires 63

des fluctuations tensorielles 64

du bruit d’un bolomètre 124

stationnaire

bruit 122

Stokes

paramètres voir paramètres de
Stokes

stratégie de balayage 127, 143

striage résiduel voir estimateur de
striage résiduel

structures

formation des ... voir formation des
structures

superposition

de mesures 113

des scans 127

synchrotron 153

synthèse

d’une carte de température 105

de cartes de polarisation 107

système

de référence

et polarimètres 144

des paramètres de Stokes 147

linéaire 165

du destriage 149

T

taux

d’accélération .. 20, voir paramètres
cosmologiques

de polarisation de la Galaxie ... 153

de polarisation du CMB 91

de réaction 31

température

de l’univers 35

de la recombinaison voir
recombinaison

des particules 35

du corps noir 30

et Big-Bang 30, 36

temps

caractéristiques 70

conforme 72

de Hubble 31

de Planck 36

tenseur

de courbure 10

de Ricci 10

énergie-impulsion 10

métrique 9

thermodynamique

principe 33

”top-down” ... voir scénario ”top-down”

traitement

des données de COSMOSOMAS ...
voir analyse

du bruit voir destriage

V

variable d’ionisation 48

variance cosmique 84

variations

du gain 177, 185

W

WIMPS 46

RÉSUMÉ

Le rayonnement fossile regorge d'une multitude d'informations physiques sur l'univers tel qu'il était quelques centaines de milliers d'années après le Big-Bang. L'analyse de ses fluctuations de température et de polarisation permet de mesurer les paramètres cosmologiques et de contraindre les théories de l'univers primordial. La polarisation permet en particulier de lever des dégénérescences entre certains paramètres cosmologiques en donnant un accès direct aux ondes gravitationnelles primordiales.

La première partie de cette thèse est consacrée au modèle standard de la cosmologie. Je présente en particulier la polarisation du rayonnement fossile.

Le signal polarisé, dont l'intensité n'excède pas dans la plupart des scénarios 10 % des fluctuations de température, est attendu à quelques micro kelvins. Pour le mesurer, on utilise souvent des bolomètres refroidis, couplés à des polariseurs. Je montre qu'il existe des dispositions optimales des détecteurs dans le plan focal de l'instrument minimisant le volume de la boîte d'erreurs et permettant d'avoir des erreurs décorrélatées sur les paramètres de Stokes, caractérisant la polarisation.

La source majeure de bruit dans ces mesures provient des fluctuations du bain thermique dans lequel plongent les bolomètres, de l'électronique de lecture, des instabilités de gain et de l'optique. Ces processus engendrent des dérives basses fréquences qui se traduisent par des niveaux de bruit relatifs entre détecteurs trop importants par rapport au signal recherché. J'applique aux données polarisées une méthode simple permettant de soustraire ces dérives basses fréquences ; elle utilise les redondances inhérentes à la stratégie de balayage du ciel par l'instrument. Les résultats montrent que ces dérives peuvent être soustraites jusqu'au niveau du bruit blanc.

Enfin, je décris l'expérience COSMOSOMAS et présente une analyse préliminaire. Elle fournira des cartes de l'émission polarisée de notre galaxie à des fréquences de l'ordre de 10 GHz.

MOTS-CLÉS : Cosmologie observationnelle — rayonnement fossile — polarisation — détection — destriage — analyse de données

ABSTRACT

The cosmic microwave background contains much information about the universe when it was young, a few hundred thousand years after the Big-Bang. The statistical analysis of its temperature and polarization fluctuations permits us to measure cosmological parameters and to constrain theories of the primordial universe. Moreover, polarization gives direct access to primordial gravity waves.

The first part of this thesis presents the standard model of cosmology and, more specifically, the polarization of the cosmic microwave background.

The polarized signal is not expected to be more than 10% of the temperature fluctuations and should be detected at a level of the order of a few micro-Kelvin. To achieve this sensitivity, we can use cooled bolometers coupled to polarizers. I show that there exist optimized configurations of the detectors in the focal plane of the instrument which lead to a minimal error box volume ; these configurations also ensure that the errors on the Stokes parameters (used to quantify the polarization) are not correlated.

The main sources of noise in these measurements come from thermal fluctuations, electronics, gain instabilities and optics. These processes lead to important low frequency drifts which significantly reduce the sensitivity of the experiment. I present a simple method which allows us to efficiently remove these drifts ; this method uses the redundancies provided by the scanning strategy of the instrument. The results show that the low frequency noise can be removed down to the white noise level.

The last part of this thesis is dedicated to a preliminary analysis of the COSMOSOMAS experiment. The goal of this experiment is to map the polarized emission of the galaxy and the cosmic microwave background fluctuations.

KEYWORDS : Observational cosmology — cosmic microwave background — polarization — detection — destripping — data analysis